Guía 3 - Ejercicio 2b

Cruz Velasco

Consigna: Escribir en segunda cuantización el Hamiltioniano para el jellium model en dos dimensiones.

Consideraciones Iniciales

El jellium model es un hamiltoniano utilizado para modelar el comportamiento de un gas de electrones. Este imagina a los electrones en un medio cargado uniformemente con carga positiva de manera que la carga total del sistema sea neutra.

Como vimos en la teórica el hamiltoniano para este modelo viene dado por tres términos:

$$H = H_b + H_{el-b} + H_{el}$$

donde H_b es el término de 'background' que modela la repulsión del medio con sí mismo, H_{el-b} modela la interacción entre los electrones y el medio y, por último H_{el} es aquel que contiene tanto la energía cinética de los electrones, como la repulsión Coulombiana entre todos los electrones que componen al gas. Recordamos que, al final del problema la idea es tomar el límite termodinámico y tenderemos a cero el factor de Yukawa (μ) que utilizamos para limitar la interacción electrón-electrón.

Para poder escribir el hamiltoniano en segunda cuantización vamos a necesitar llevarlo a la forma que tienen en este formalismo los operadores de uno y dos cuerpos, es decir:

$$F = \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2}\sum_{\sigma_1\sigma_2} \left\langle \vec{k}_1\sigma_1 \middle| f \middle| \vec{k}_2\sigma_2 \right\rangle a^\dagger_{\vec{k}_1\sigma_1} a_{\vec{k}_2\sigma_2} \tag{1}$$

$$G = -\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4} \left\langle \vec{k}_1\sigma_1\vec{k}_2\sigma_2 \middle| g \middle| \vec{k}_3\sigma_3\vec{k}_4\sigma_4 \right\rangle a^\dagger_{\vec{k}_1\sigma_1} a^\dagger_{\vec{k}_2\sigma_2} a_{\vec{k}_3\sigma_3} a_{\vec{k}_4\sigma_4} \tag{2}$$

donde el menos global viene de haber permutado los operadores destrucción para que queden en el orden en el que están.

Donde las funciones de onda que resultan de resolver Schrödinger en 3d para el hamiltoniano del jellium model son:

$$\psi_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}) = \frac{1}{V^{1/3}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \eta_\sigma$$

como esta solución es separable podemos llevarla a 2d tomando $z = 0$

$$\psi_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}) = \frac{1}{A^{1/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \eta_\sigma \quad ; \quad \psi^\dagger_{\vec{k}\sigma}(\vec{x}) = \frac{1}{A^{1/2}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \eta^\dagger_\sigma \tag{3}$$

donde ahora $\vec{k}$, $\vec{x}$ son vectores en 2d.

Hamiltoniano del background (H_b)

Comenzamos buscando la solución para el hamiltoniano que representa la interacción del medio uniforme de fondo con sí mismo. Este viene dado por

$$H_b = \frac{1}{2}e^2 \iint d^2\vec{x}_1 d^2\vec{x}_2 \frac{n(\vec{x}_1)n(\vec{x}_2)e^{-\mu|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}}{|\vec{x}_1-\vec{x}_2|}$$

Como hicimos para el caso 3d, tomamos $n(\vec{x}_1) = N/A = n(\vec{x}_2)$. Además podemos tomar un cambio de variables, tomando $\vec{x} = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$, dejando $\vec{x}_2$ como ya está.

$$H_b = \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2 \int d^2\vec{x}_2 \int d^2\vec{x}\ \frac{e^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}$$

Tomando coordenadas polares, nos queda $d\vec{x} = rdr\ d\varphi$.

$$H_b = \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2 \int d^2\vec{x}_2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \cancel{r}\, dr\ \frac{e^{-\mu r}}{\cancel{r}} = \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2 \int d^2\vec{x}_2 \left(-\frac{2\pi}{\mu}\right) e^{-\mu r}\Big|_0^{\infty}$$

$$\Longrightarrow H_b = \frac{1}{2}e^2 \left(\frac{N}{A}\right)^2 A\frac{2\pi}{\mu} \Longrightarrow \boxed{H_b = \frac{\pi(eN)^2}{A\mu}}$$

Interacción electrón-background (H_{el-b})

El término que nos da la interacción entre el medio y los electrones es

$$H_{el-b} = -e^2 \int d^2\vec{x} \sum_{i=1}^{N} \frac{n(\vec{x})e^{-\mu|\vec{x}-\vec{r}_i|}}{|\vec{x}-\vec{r}_i|} = -e^2\frac{N}{A} \sum_{i=1}^{N} \int d^2\vec{x}\ \frac{e^{-\mu|\vec{x}-\vec{r}_i|}}{|\vec{x}-\vec{r}_i|}$$

De nuevo, aplico un cambio de variables $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_i$, y a su vez tomamos polares, de manera que $d^2\vec{y} = r\, drd\varphi$:

$$H_{el-b} = -e^2\frac{N}{A} \sum_{i=1}^{N} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r\, dr\ \frac{e^{-\mu r}}{r} = -e^2\frac{N}{A} \sum_{i=1}^{N} \frac{2\pi}{\mu}$$

$$\Longrightarrow \boxed{H_{el-b} = \frac{-2\pi(eN)^2}{A\mu}}$$

Como podemos ver, ambos términos que tienen que ver con el medio son constantes, por lo que podríamos agruparlos en un único término:

$$\boxed{H_{medio} = \frac{-\pi(eN)^2}{A\mu}} \tag{4}$$

La forma de este término en segunda cuantización es bastante directa porque, como podemos ver, es un operador proporcional a la identidad. Así que seguimos con el término de los electrones y luego, si resulta necesario escribiremos H_{medio} en la forma de segunda cuantización.

Hamiltoniano electrónico (H_e)

Esta sección del Hamiltoniano es de la forma:

$$H_{el} = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2} e^2 \sum_{i \neq j}^{N} \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

donde podemos separar entre la energía cinética t y la repulsión Coulombiana, v. Ahora vamos a analizar cada parte por separado, principalmente porque t es un operador de un cuerpo y v, uno de dos cuerpos. Acá no nos vamos a salvar de braketear los estados, ya que no podemos obtener una solución clásica del problema.

Comencemos con la energía cinética, t. La Ecuación 1 nos dice como pasar t al formalismo de segunda cuantización:

$$T = \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \left\langle \vec{k}_1 \sigma_1 \middle| t \middle| \vec{k}_2 \sigma_2 \right\rangle a^\dagger_{\vec{k}_1 \sigma_1} a_{\vec{k}_2 \sigma_2}$$

por lo tanto tenemos que calcular el elemento de matriz de t.

$$\left\langle \vec{k}_1 \sigma_1 \middle| t \middle| \vec{k}_2 \sigma_2 \right\rangle = \left\langle \vec{k}_1 \sigma_1 \middle| \frac{p_i^2}{2m} \middle| \vec{k}_2 \sigma_2 \right\rangle = \int d^2\vec{x} \psi^\dagger_{\vec{k}_1 \sigma_1}(\vec{x}) \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) \psi_{\vec{k}_2 \sigma_2}(\vec{x})$$

Reemplazamos con la forma explicita de las funciones de onda que tenemos en la Ecuación 3. Como el laplaciano se aplica sobre las coordenadas de la partícula i y la función de onda depende de las coordenadas de la partícula j. Por este motivo el término va a ser no-nulo solo cuando $i = j$, por lo cual la sumatoria sobre i va a desaparecer. Además de esto, vamos a utilizar la ortonormalidad de los espinores ($\eta^\dagger_\sigma \cdot \eta_{\sigma'} = \delta_{\sigma\sigma'}$), lo que nos deja con:

$$\left\langle \vec{k}_1 \sigma_1 \middle| t \middle| \vec{k}_2 \sigma_2 \right\rangle = \frac{N}{A} \int d^2\vec{x} \; e^{-i\vec{k}_1 \cdot \vec{x}} \eta^\dagger_{\sigma_1} \left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \right) e^{i\vec{k}_2 \cdot \vec{x}} \eta_{\sigma_2} = \frac{N}{A} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \frac{-\hbar^2}{2m} \int d^2\vec{x} (ik_2)^2 e^{-i(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) \cdot \vec{x}}$$

La integral que nos quedó la conocemos, es:

$$\int d^2\vec{x} e^{-i(\vec{k} - \vec{p}) \cdot \vec{x}} = A \delta_{\vec{k}\vec{p}}$$

entonces

$$\left\langle \vec{k}_1 \sigma_1 \middle| t \middle| \vec{k}_2 \sigma_2 \right\rangle = \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m}$$

Con lo que podemos escribir la expresión de la energía cinética en segunda cuantización,

$$T = \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \sum_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} a^\dagger_{\vec{k}1 \sigma_1} a_{\vec{k}_2 \sigma_2}$$

llamando al momento y la proyección de spin que nos quedan $\vec{k}$ y σ respectivamente llegamos a la expresión de la energía cinética en segunda cuantización:

$$T = \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^\dagger_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} \tag{5}$$

Ahora seguimos con la repulsión coulombiana entre los electrones, v. Como este es un operador de dos cuerpos, tenemos que utilizar la Ecuación 2, que nos deja con:

$$V = -\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle a^{\dagger}_{\vec{k}_1\sigma_1}a^{\dagger}_{\vec{k}_2\sigma_2}a_{\vec{k}_3\sigma_3}a_{\vec{k}_4\sigma_4}$$

Por lo tanto, de nuevo tenemos que calcular el elemento de matriz para v que ahora va a llevar 2 integrales. Este queda:

$$\begin{aligned}
\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle &= \frac{1}{2}e^2\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| \frac{e^{-\mu|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}e^2\int d^2\vec{r}_i\int d^2\vec{r}_j\psi^{\dagger}_{\vec{k}_1\sigma_1}(\vec{r}_i)\psi^{\dagger}_{\vec{k}_2\sigma_2}(\vec{r}_j)\frac{e^{-\mu|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\psi_{\vec{k}_3\sigma_3}(\vec{r}_i)\psi_{\vec{k}_4\sigma_4}(\vec{r}_j) \\
&= \frac{1}{2A^2}e^2\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\int d^2\vec{r}_i\int d^2\vec{r}_j e^{-i\vec{k}_1\cdot\vec{r}_i}e^{-i\vec{k}_2\cdot\vec{r}_j}\frac{e^{-\mu|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}e^{i\vec{k}_3\cdot\vec{r}_i}e^{i\vec{k}_4\cdot\vec{r}_j} \\
&= \frac{1}{2A^2}e^2\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\int d^2\vec{r}_i\int d^2\vec{r}_j e^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\cdot\vec{r}_i}e^{-i(\vec{k}_2-\vec{k}_4)\cdot\vec{r}_j}\frac{e^{-\mu|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}
\end{aligned}$$

donde resulta importante aclarar que los estados de la partícula 1 y 3 viven en un mismo hilbert mientras que las partículas 2 y 4 viven en otro. Los estados de dos partículas que estamos usando viven en el espacio que resulta del producto tensorial de ambos.

Ahora tomamos un cambio de variables muy similar al que tomamos en la sección de H_b, $\vec{r} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ dejando a $\vec{r}_j$ como la otra variable de integración. Esto nos va a separar las dos integrales que tenemos, permitiéndonos resolver una de manera relativamente sencilla, como vemos a continuación:

$$\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle = \frac{1}{2A^2}e^2\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\int d^2\vec{r}_j\int d^2\vec{r}\; e^{-i(\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3-\vec{k}_4)\cdot\vec{r}_j}e^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\cdot\vec{r}}\frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$$

$$\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle = \frac{e^2}{2A}\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\int d^2\vec{r}\; e^{-i(\vec{k}_1-\vec{k}_3)\cdot\vec{r}}\frac{e^{-\mu|\vec{r}|}}{|\vec{r}|}$$

$$\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle = \frac{e^2}{2A}\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{\infty} rdr\; e^{-i|(\vec{k}_1-\vec{k}_3)|rcos(\varphi)}\frac{e^{-\mu r}}{r}$$

$$\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2\right| v \left|\vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4\right\rangle = \frac{\pi e^2}{A}\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\int_0^{\infty} dr\; J_0(qr)e^{-\mu r}$$

donde llamé $q = |\vec{q}| = |\vec{k}_1 - \vec{k}_3|$ y, donde $J_0(qr)$ es la función de Bessel de primera especie. Usando las integrales de Bessel, que nos dan una expresión integral de estas funciones, vemos que:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{-i(n\tau - xsin(\tau))} \implies J_0(qr) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{iqrsin(\tau)}$$

Lo que nos permite expresar la integral que tenemos que resolver de una forma más amigable:

$$\int_0^\infty dr J_0(qr)e^{-\mu r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr \int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{iqrsin(\tau)}e^{-\mu r} = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty dr \int_{-\pi}^{\pi} d\tau e^{-(\mu - iq\,sin(\tau))r}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} d\tau \frac{e^{-(\mu - iq\,sin(\tau))r}}{-(\mu - iq\,sin(\tau))}\bigg|_0^\infty = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau}{(\mu - iq\,sin(\tau))}$$

Notamos que si $sin\tau = (e^{i\tau} - e^{-i\tau})/(2i)$, entonces, la integral queda

$$\int_0^\infty dr J_0(qr)e^{-\mu r} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\tau}{(\mu - \frac{1}{2}q\,(e^{i\tau} - e^{-i\tau}))}$$

Esto nos permite pasar al plano complejo, de manera tal que $z = e^{i\tau}$. Ahora, veamos que sucedería en el integrando si realizamos este cambio:

$$\frac{1}{(\mu - \frac{1}{2}q\,(z - z^{-1}))} = \frac{z}{(\mu z - \frac{1}{2}q\,(z^2 - 1))} = \frac{z}{-\frac{q}{2}z^2 + \mu z + \frac{1}{2}q}$$

Podemos ver que el denominador se anula cuando tenemos $z_\pm = \frac{1}{2q}(\mu \pm \sqrt{\mu^2 + q^2})$. Por lo tanto

$$\frac{1}{(\mu - \frac{1}{2}q\,(z - z^{-1}))} = \frac{z}{(-\frac{q}{2})(z - z_+)(z - z_-)}$$

Esta expresión muestra explícitamente dos polos que están sobre la recta real. La idea entonces, es resolver la integral utilizando residuos. Aplicando el cambio de variable a la integral, e introduciendo el integrando al que llegamos nos queda:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{z}\frac{z}{(-\frac{q}{2})(z - z_+)(z - z_-)} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{(-\frac{q}{2})(z - z_+)(z - z_-)}$$

donde vale aclarar que la curva C es la circunferencia de radio 1 centrada en 0.

Acá podemos utilizar el teorema de residuos, que nos dice que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dz}{(-\frac{q}{2})(z - z_+)(z - z_-)} = \sum_k Res\bigg(f(z) = \frac{1}{(-\frac{q}{2})(z - z_+)(z - z_-)}, z_k\bigg)$$

donde z_k son todos los polos que quedan en el interior de C.

Notemos que tenemos que asumir que uno de los polos queda fuera del círculo y que el otro queda dentro porque, en caso contrario, la integral sería nula. Asumimos que el que queda fuera es z_+ (porque nos da un residuo negativo). Entonces, nos queda un solo residuo dentro de C, z_-. Podemos calcularlo de manera bastante directa:

$$Res(f(z), z_+) = \lim_{z \to z_+} \frac{\cancel{(z - z_+)}}{(-\frac{q}{2})\cancel{(z - z_+)}(z - z_-)} = \frac{1}{z_+ - z_-} = \frac{\cancel{q}/\cancel{2}}{(-\cancel{q}/\cancel{2})(-\sqrt{\mu^2 + q^2})}$$

Entonces, podemos juntar el resultado con la expresión de la que originalmente partimos

$$\left\langle \vec{k}_1\sigma_1, \vec{k}_2\sigma_2 \right| v \left| \vec{k}_3\sigma_3, \vec{k}_4\sigma_4 \right\rangle = \frac{\pi e^2}{A}\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+q^2}}$$

Finalmente, con esto podemos escribir el operador de la repulsión coulombiana de los electrones en segunda cuantización:

$$V = -\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3\vec{k}_4}\sum_{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_2,\vec{k}_3+\vec{k}_4}\frac{\pi e^2}{A\sqrt{\mu^2+q^2}}a^\dagger_{\vec{k}_1\sigma_1}a^\dagger_{\vec{k}_2\sigma_2}a_{\vec{k}_3\sigma_3}a_{\vec{k}_4\sigma_4}$$

Todo va a quedar más prolijo si redefinimos los momentos para que nos queden como los habíamos tomado en la teórica, llamando $\vec{k}_1 = \vec{k}+\vec{q}$, $\vec{k}_2 = \vec{p}-q$, $\vec{k}_3 = \vec{k}$ y $\vec{k}_4 = \vec{p}$. Esta definición fuerza la conservación del impulso que me impone la delta de los $\vec{k}_i$ y mantiene el $\vec{q}$ que definí antes. Además, llamamos a las proyecciones de spin que me quedan σ y σ'. Con todo esto, el resultado para V es

$$V = -\sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}}\sum_{\sigma\sigma'}\frac{\pi e^2}{A\sqrt{\mu^2+q^2}}a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}a^\dagger_{\vec{p}-\vec{q}\sigma'}a_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{p}\sigma'} \tag{6}$$

Antes de juntar todo, conviene considerar en separado el término para el cual los electrones no interactúan, es decir, donde no tenemos transferencia de momento $q = 0$. Este término es de la forma:

$$V_{q=0} = -\sum_{\vec{k}\vec{p}}\sum_{\sigma\sigma'}\frac{\pi e^2}{A\mu}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{p}\sigma'}a_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{p}\sigma'} = -\sum_{\vec{k}\vec{p}}\sum_{\sigma\sigma'}\frac{\pi e^2}{A\mu}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}(-a_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{p}\sigma'} + \delta_{\vec{k},\vec{p}}\delta_{\sigma\sigma'})a_{\vec{p}\sigma'}$$
$$= -\frac{\pi e^2}{A\mu}\left[\sum_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma} - \sum_{\vec{k}\sigma}\sum_{\vec{p}\sigma'}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{p}\sigma'}a_{\vec{p}\sigma'}\right] = -\frac{\pi e^2}{A\mu}\left[\underbrace{\sum_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma}}_{N} - \underbrace{\sum_{\vec{k}\sigma}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma}}_{N}\underbrace{\sum_{\vec{p}\sigma'}a^\dagger_{\vec{p}\sigma'}a_{\vec{p}\sigma'}}_{N}\right]$$

$$\implies V_{q=0} = \frac{\pi e^2}{A\mu}(N^2 - N) \tag{7}$$

Juntando los resultados para T y V, dados por las ecuaciones 5, 6 y 7 podemos escribir el operador en segunda cuantización para todo el término electrónico.

$$\boxed{H_{el} = \sum_{\vec{k}\sigma}\frac{\hbar^2k^2}{2m}a^\dagger_{\vec{k}\sigma}a_{\vec{k}\sigma} + \frac{\pi e^2}{A}\sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}}\sum_{\sigma\sigma'}\frac{1}{\sqrt{\mu^2+q^2}}a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\sigma}a^\dagger_{\vec{p}-\vec{q}\sigma'}a_{\vec{p}\sigma'}a_{\vec{k}\sigma} + \frac{\pi e^2}{A\mu}(N^2 - N)}$$

donde en el segundo término permute los operadores de destrucción para que su contribución sea explícitamente positiva.

Todo junto

La primera observación que podemos hacer al juntar H_{medio} y H_{el} es que, al igual que en el caso 3d, toda la contribución de la interacción de los electrones con el medio y aquella del medio con sí mismo se cancelan con el término que va como N^2. Entonces, esto nos deja solo con contribuciones que provienen de la interacción electrónica y la energía cinética de los electrones.

Finalmente entonces, si juntamos todo, nos quedaría

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^\dagger_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \frac{\pi e^2}{A} \left[\sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\sigma\sigma'} \frac{1}{\sqrt{\mu^2 + q^2}} a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\sigma} a^\dagger_{\vec{p}-\vec{q}\sigma'} a_{\vec{p}\sigma'} a_{\vec{k}\sigma} - \frac{N}{\mu} \right]$$

Para el término que nos quedó constante al final de todo podemos utilizar el mismo argumento que ya utilizamos en el caso 3d. Lo que decimos básicamente es que este término contribuye una energía $\pi e^2/(\mu A)$ constante por partícula en el gas. Podemos notar que para $L = A^{1/2} \to \infty$ esta constante se vuelve despreciable, por lo cual podemos deshacernos de ella. Notamos que el otro término de interacción no se anula ya que la presencia de dos operadores de creación y dos de destrucción lo hacen proporcional a N^2 en lugar de a N.

Por último, vamos a anular el factor de Yukawa μ, que todavía está presente en el término de interacción. Esto nos deja con nuestro resultado final:

$$\boxed{H = \sum_{\vec{k}\sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} a^\dagger_{\vec{k}\sigma} a_{\vec{k}\sigma} + \sum_{\vec{k}\vec{p}\vec{q}} \sum_{\sigma\sigma'} \frac{\pi e^2}{Aq} a^\dagger_{\vec{k}+\vec{q}\sigma} a^\dagger_{\vec{p}-\vec{q}\sigma'} a_{\vec{p}\sigma'} a_{\vec{k}\sigma}}$$

que como podemos ver, es análogo al caso tridimensional.