# Guía 4 - Ejercicio 1

Zubieta, Ezequiel.

$2^{\text{ndo}}$ cuatrimestre 2020

Demostrar las siguientes identidades:

$$\theta(\tau) = lim_{\eta\to 0^+} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} \tag{1}$$

$$\theta(-\tau) = lim_{\eta\to 0^+} + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - i\eta} \tag{2}$$

## 1. Contexto

Queremos calcular la función de Green en el caso de fermiones libres y no interactuantes, por lo cual V=0 y H=T.

Como V=0, las representaciones de Heisenberg y de interacción son la misma. La función de Green se escribe como:

$$iG^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r'}t') = \langle\phi_0|T[\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I\psi^\dagger_\alpha(\mathbf{r}t)_I]|\phi_0\rangle \tag{3}$$

Luego pasamos a la base de momentos utilizando:

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}.r} C_{\mathbf{k}\alpha}(t)_{(I)} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}t} C_{\mathbf{k}\alpha} \tag{4}$$

$$\psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'}t')_I = \sum_{\mathbf{k'}} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k'}.\mathbf{r'}} e^{i\epsilon_{\mathbf{k}}t} C^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} \tag{5}$$

Reemplazamos estas expresiones en la función de Green. Además, nos aparecen deltas en el espín y en el momento por lo cual nos queda:

$$G^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r'}t') = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Omega}\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})} e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}(t-t')}$$

$$X\left[\theta(t-t')\langle\phi_0|C_{\mathbf{k}\alpha}C^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle - \theta(t'-t)\langle\phi_0|C_{\mathbf{k}\alpha}C^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle\right] \tag{6}$$

Luego, considerando que $|\phi_0\rangle$ es una esfera de Fermi:

$$\langle\phi_0|C_{\mathbf{k}\alpha}C^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle = \theta(k - k_F) \tag{7}$$

$$\langle\phi_0|C^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}C_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle = \theta(k_F - k). \tag{8}$$

Entonces, pasando al límite continuo obtenemos

$$iG^0_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r'}t') = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(2\pi)^3}\int d^3\mathbf{k}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}(t-t')}\big[\theta(t-t')\theta(k-k_F) - \theta(t'-t)\theta(k_F-k)\big] \tag{9}$$

lo cual nos dice que, como H no depende de t, la función de Green en el espacio de momentos es:

$$iG^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t') = \delta_{\alpha\beta}e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}(t-t')}\big[\theta(t-t')\theta(k-k_F) - \theta(t'-t)\theta(k_F-k)\big] \tag{10}$$

Ahora queremos pasar al dominio de frecuencias, por lo cual necesitamos calcular la transformada de Fourier:

$$G^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, w) = \int d(t-t')e^{-i\epsilon_{\mathbf{k}}(t-t')}G^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t'). \tag{11}$$

Para hacer este cálculo, se reemplaza en $G^0_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t')$ las $\theta(t-t')$ y $\theta(t'-t)$ por las expresiones que queremos demostrar.

# 2. Demostración

Para demostrar la expresión, utilizaremos el Teorema de los residuos:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, z_k) \tag{12}$$

donde

$$Res(f, z_0) = lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \tag{13}$$

para un polo simple.

## 2.1.

La función que queremos integrar es

$$f_-(w) = \frac{e^{-i\omega t}}{w+i\eta} \tag{14}$$

,

la cual tiene un único polo simple en $\omega = -i\eta$, por lo cual podemos calcular el residuo:

$$Res(f(-i\eta)) = lim_{w\to -i\eta}(\omega + i\eta)\frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} = e^{-\eta t} \tag{15}$$

Con esta cuenta en mente, pasemos a la integral que queremos resolver:

$$\theta(t) = lim_{\eta\to 0^+} - \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} \tag{16}$$

Para calcular la integral con ayuda del Teorema de los residuos, tenemos que cerrarla con un semicírculo en el plano complejo.

Acá hay que notar que

$$e^{-i\omega t} = e^{-iRe(\omega)t} e^{Im(\omega)t} \tag{17}$$

.

Por lo tanto, para que la expresion no diverja, separaremos en dos casos. Cuando t>0, cerramos con un semicírculo en el semiplano inferior (Im($\omega$)<0) y cuando t<0, cerramos con un semicírculo en el plano superior (Im($\omega$) >0), como se muestra en la Figura 1.

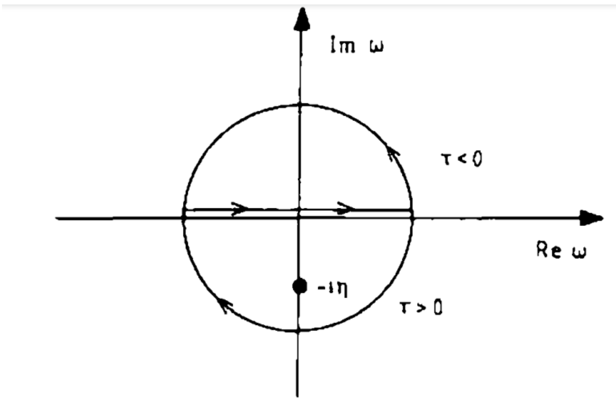


Figura 1: Curvas utilizadas para utilizar el Teorema de Residuos cuando $t > 0$ y $t < 0$

Notemos que la singularidad se encuentra en el semiplano negativo de Im($\omega$). Por lo tanto, para el caso Im($\omega$) $> 0$, es decir, $t < 0$, no tenemos ninguna singularidad por lo cual la integral vale 0. En el caso en que $t > 0$, la integral resulta

$$lim_{\eta \to 0^+} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} = lim_{\eta \to 0^+} - \frac{1}{2\pi i} [ \oint_C d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} - \int_{semicirculo_inferior} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta}] \tag{18}$$

.

Al hacer que el radio del semicírculo tienda a infinito, la segunda integral se anula y nos queda, utilizando el teorema de los residuos:

$$lim_{\eta \to 0^+} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} = lim_{\eta \to 0^+} - \frac{1}{2\pi i} 2\pi i e^{-\eta t} = 1 \tag{19}$$

En conclusión,

$$lim_{\eta \to 0^+} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\eta} = \theta(t). \tag{20}$$

Luego el otro caso es análogo.