

## Guía 4 Ejercicio 4

Demostrar que para el gas de fermiones no interactuantes se tiene:

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k - k_F) \delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)}) = (1 - \langle n_{\mathbf{k}} \rangle) \delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)})$$

$$B(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k_F - k) \delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)}) = \langle n_{\mathbf{k}} \rangle \delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)})$$

## Solución<sup>1</sup>

Para un gas de fermiones libres no interactuantes, la función de Green es:

$$G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \delta_{\alpha\beta} \left[ \frac{\theta(k - k_F)}{\omega - \epsilon_k + i\eta} + \frac{\theta(k_F - k)}{\omega - \epsilon_k - i\eta} \right] \quad (1)$$

donde  $\epsilon_k = \frac{k^2}{2m}$  es la energía asociada al momento  $k$ .

Como consideramos a la función de Green diagonal en spin (no hay ninguna interacción en spin)  $G_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)$ .

La representación de Lehmann de la función de Green:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \left\{ \underbrace{\sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle|^2}{\omega - \mu - \omega_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)} + i\eta}}_{(I)} + \underbrace{\sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle|^2}{\omega - \mu + \omega_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)} - i\eta}}_{(II)} \right\} \quad (2)$$

Donde  $\mu$  es el potencial químico y  $\omega_{n,\pm\mathbf{k}}^{(N\pm 1)}$  es la energía de excitación de un sistema con  $N \pm 1$  partículas.

Recordar que  $\mu^N = E_0^{(N+1)} - E_0^{(N)}$  y  $\mu^{(N-1)} = E_0^{(N)} - E_0^{(N-1)}$ ; y que para un sistema suficientemente largo se tiene  $\mu^{(N)} = \mu^{(N-1)} \equiv \mu$  (siempre que no haya saltos en la energía).

Escribiendo en una forma más genérica la representación de Lehmann:

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\epsilon \left[ \frac{A(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - \mu - \epsilon + i\eta} + \frac{B(\mathbf{k}, \omega)}{\omega - \mu + \epsilon + i\eta} \right] \quad (3)$$

Donde se tienen las siguientes funciones espectrales.

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle|^2}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \delta(\epsilon - w_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)})$$

$$B(\mathbf{k}, \omega) = \sum_n \frac{|\langle \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle|^2}{\langle \Psi_0 | \Psi_0 \rangle} \delta(\epsilon - w_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)}) \quad (4)$$

<sup>1</sup>Gross - página 170. Fetter y Walecka - página 72

Se quiere llegar a  $G^{(0)}(\mathbf{k}, \omega)$  partiendo de la representación de Lehmann de la función de Green (2).

### Término (I)

Corresponde a la adición de una partícula la cual tiene que estar por encima de la superficie de Fermi. Modificando un poco el numerador (no es necesario hacerlo) y acordándose que el estado fundamental es una esfera de Fermi, el numerador se puede expresar como:

$$\underbrace{\sum_n \langle \Psi_0 | c_{\mathbf{k}} | \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) \rangle \langle \Psi_n^{(N+1)}(\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle}_{\sum_n |\Psi_n^{(N+1)}\rangle \langle \Psi_n^{(N+1)}| = 1}} = \underbrace{\langle \Psi_0 | c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle}_{\langle c_{\mathbf{k}}^\dagger \Psi_0 | c_{\mathbf{k}}^\dagger \Psi_0 \rangle}} = \theta(k - k_F)$$

También se puede llegar a la misma theta de Heaviside de forma matemática, utilizando la regla de anticonmutación de los operadores para fermiones ( $\{c_{\mathbf{k}}, c_{\mathbf{k}}^\dagger\} = 1$ ) y la propiedad  $\theta(-x) = 1 - \theta(x)$

$$\langle \Psi_0 | c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_0 \rangle = \langle \Psi_0 | 1 - c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle = 1 - \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle = 1 - \theta(k_F - k) = \theta(k - k_F)$$

En el caso del denominador, la energía de excitación es la diferencia entre la energía actual de una partícula adicional con momento  $k > k_F$  en el sistema con N partículas, y la energía que tendría en la superficie de Fermi (ya que  $E_0^{(N+1)}$  es la energía del estado fundamental de un sistema con N+1 partículas), por lo que la diferencia de energía está dada por:

$$\omega_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)} \equiv E_{n,\mathbf{k}}^{(N+1)} - E_0^{(N+1)} = \epsilon_{\mathbf{k}} - \epsilon_F$$

### Término (II)

Corresponde a un agujero debajo de la superficie de Fermi. El numerador se puede expresar como

$$\underbrace{\sum_n \langle \Psi_0 | c_{\mathbf{k}}^\dagger | \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) \rangle \langle \Psi_n^{(N-1)}(-\mathbf{k}) | c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle}_{\sum_n |\Psi_n^{(N-1)}\rangle \langle \Psi_n^{(N-1)}| = 1}} = \langle \Psi_0 | c_{\mathbf{k}}^\dagger c_{\mathbf{k}} | \Psi_0 \rangle = \langle \hat{n}_{\mathbf{k}} \rangle = \theta(k_F - k)$$

En el denominador, para obtener la energía del estado fundamental en un sistema de (N-1) partículas se remueve una partícula de la superficie de Fermi, mientras que el estado excitado de un sistema de (N-1) partículas se logra removiendo cualquier partícula con momento  $k$  y energía  $\epsilon_k < \epsilon_F$  del estado fundamental de un sistema de N partículas. Luego el sistema tiene momento  $-k$  ya que la esfera de Fermi totalmente ocupada tenía momento nulo.

Así, la diferencia de energía está dada por:

$$\omega_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)} \equiv E_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)} - E_0^{(N-1)} = \epsilon_F - \epsilon_{-\mathbf{k}}$$

Esto quiere decir que se removió una partícula de la superficie de Fermi para llenar un hueco dentro de la esfera.

Ahora bien, como el potencial químico  $\mu$  es el cambio en la energía del estado fundamental al agregarse una partícula al sistema, entonces para un sistema no interactuante  $\mu = \epsilon_F^2$ .

---

<sup>2</sup>Fetter y Wallecka - página 76

Luego reemplazando el potencial químico donde corresponda, se obtiene la función de Green para el gas de fermiones no interactuantes.

Una observación importante es que la función  $G(k, \omega)$  es una función meromorfa de  $\omega$  (holomorfa en el espacio complejo salvo en los polos), con polos simples en las energías de excitación del sistema interactuante correspondiente a momento  $k$ .

Para frecuencias debajo de  $\mu$ , las singularidades están por encima del eje real ( $\mu > \mu - \omega_{n,-\mathbf{k}}^{(N-1)} + i\eta$ ), y para frecuencias por encima de  $\mu$ , esas singularidades están por debajo del eje real ( $\mu < \mu + \omega_{n,-\mathbf{k}}^{(N+1)} - i\eta$ ), ver figura 1<sup>3</sup>.

De esta manera, las singularidades de la función de Green ceden inmediatamente las energías de aquellos estados excitados para los que el numerador no desaparece. Para un sistema que interactúa, el operador de campo conecta el estado fundamental con muchos estados excitados del sistema que contiene partículas  $N \pm 1$ . Sin embargo, para el sistema que no interactúa, el operador de campo conecta solo un estado al estado fundamental, de modo que  $G^0(k, \omega)$  (ecuación 1) tiene solo un único polo por debajo del eje real a  $\omega = \frac{k^2}{2m}$  si  $k < k_F$ , y por encima del eje real en el mismo valor de  $\omega$  si  $k > k_F$ .

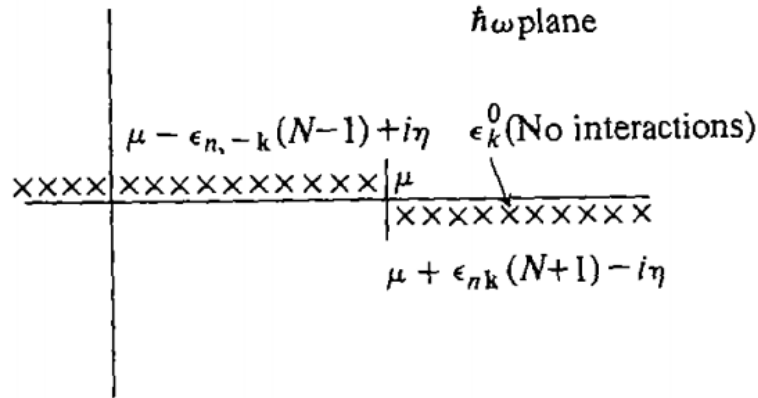


Figura 1: Singularidades de  $G(k, \omega)$  en el plano  $\omega$  complejo

<sup>3</sup>Notar que en el Fetter y Wallecka todos los cálculos de la función de Green utilizan  $\hbar$ , en nuestro caso como no los usamos, no los incluí en las cuentas (sino  $\omega \rightarrow \hbar\omega$ , y en caso de las energías  $k \rightarrow \hbar k$ )