Física de muchos cuerpos
Año 2020

Guía 4 - Ejercicio 5

Demostrar que para un par de operadores cualquiera S, O, se cumple la siguiente relación:

$$e^{iS}\ O\ e^{-iS} = O + i\,[S,O] + \frac{i^2}{2!}\,[S,[S,O]] + \frac{i^3}{3!}\,[S,[S,[S,O]]] + ...$$

Luego, si se tienen operadores de creación y destrucción $c_{\mathbf{k}}^{\dagger}$, $c_{\mathbf{k}}$, respectivamente, y un hamiltoniano H_0:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\ c_{\mathbf{k}}^{\dagger} c_{\mathbf{k}},$$

obtener los siguientes resultados:

$$c_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{-i\omega_{\mathbf{k}}t}\ c_{\mathbf{k}}\ \wedge\ c_{\mathbf{k}}^{\dagger}(t)_I = e^{i\omega_{\mathbf{k}}t}\ c_{\mathbf{k}}^{\dagger}.$$

Resolución

q.v.q. $e^{iS}\ O\ e^{-iS} = O + i\,[S,O] + \dfrac{i^2}{2!}\,[S,[S,O]] + \dfrac{i^3}{3!}\,[S,[S,[S,O]]] + ...$

$B := iS \Longrightarrow e^{B}\ O\ e^{-B} = O + [B,O] + \dfrac{1}{2!}\,[B,[B,O]] + \dfrac{1}{3!}\,[B,[B,[B,O]]] + ...$

Etiquetamos cada término según el orden del operador B:

- $A^{(0)} := \dfrac{1}{0!}O\ /\ A^{(0)} \sim \mathcal{O}(B^0)$.
- $A^{(1)} := \dfrac{1}{1!}\,[B,O] \Longrightarrow A^{(1)} = \dfrac{0!}{1!}\left[B, \dfrac{1}{0!}O\right] = \dfrac{0!}{1!}\left[B, A^{(0)}\right]\ /\ A^{(1)} \sim \mathcal{O}(B^1)$.
- $A^{(2)} := \dfrac{1}{2!}\,[B,[B,O]] \Longrightarrow A^{(2)} = \dfrac{1!}{2!}\left[B, \dfrac{1}{1!}\,[B,O]\right] = \dfrac{1!}{2!}\left[B, A^{(1)}\right]\ /\ A^{(2)} \sim \mathcal{O}(B^2)$.
- $A^{(3)} := \dfrac{1}{3!}\,[B,[B,[B,O]]] \Longrightarrow A^{(3)} = \dfrac{2!}{3!}\left[B, \dfrac{1}{2!}\,[B,[B,O]]\right] = \dfrac{2!}{3!}\left[B, A^{(2)}\right]\ /\ A^{(3)} \sim \mathcal{O}(B^3)$.

La estructura parece mostrar una recurrencia entre términos consecutivos, según:

$$A^{(n)} = \frac{(n-1)!}{n!}\left[B, A^{(n-1)}\right], \tag{1}$$

identificando cada $A^{(n)}$ como:

$$A^{(n)} = \frac{1}{n!}\left[B, ...\left[B, \left[B, O\right]\right]...\right], \tag{2}$$

de modo que:

$$e^{B}\ O\ e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}. \tag{3}$$

Para que esto tenga generalidad $\forall\ n \in N$, demostraremos por inducción que cada término puede expresarse según su antecesor a partir de la Ecuación (1), llegando a la definición de cada $A^{(n)}$ según la Ecuación (2), de modo que se cumpla la Ecuación (3). La hipótesis inductiva será igualar las Ecuaciones (1) y (2):

- $k = 1$:

  $$A^{(1)} = \frac{(1-1)!}{1!}\left[B, A^{(1-1)}\right] = \frac{0!}{1!}\left[B, A^{(0)}\right] = \frac{1}{1!}[B, O],$$

  lo cual verifica la igualdad.

- $k = n$:

  $$A^{(n)} = \frac{(n-1)!}{n!}\left[B, A^{(n-1)}\right] = \frac{1}{n!}[B, ...[B, [B, O]]...],$$

  por hipótesis inductiva.

- $k = n + 1$:

  $$A^{(n+1)} = \frac{n!}{(n+1)!}\left[B, A^{(n)}\right] = \frac{n!}{(n+1)!}\frac{(n-1)!}{n!}\left[B, \left[B, A^{(n-1)}\right]\right] = \overbrace{...}^{n\ veces} =$$

  $$\frac{n!}{(n+1)!}.....\frac{0!}{1!}\left[B, ..., \left[B, \left[B, A^{(0)}\right]\right]...\right] = \frac{1}{(n+1)!}[B, ..., [B, [B, O]]...],$$

  lo cual verifica la proposición.

Con esto, recordando que $B = iS$, tenemos:

$$\boxed{e^{iS}\ O\ e^{-iS} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}[B, ..., [B\,[B, O]]...]} \tag{4}$$

Ahora utilizaremos este resultado para evolucionar los operadores $c_{\mathbf{k}}$, $c^{\dagger}_{\mathbf{k}}$ según el picture de Interacción:

$$c_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\ c_{\mathbf{k}}\ e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}, \tag{5}$$

$$c^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\ c^{\dagger}_{\mathbf{k}}\ e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}}, \tag{6}$$

siendo H_0 un hamiltoniano diagonalizado según:

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}}\ c^{\dagger}_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}. \tag{7}$$

q.v.q. $c_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t}\ c_{\mathbf{k}}\ \wedge\ c^{\dagger}_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{i\omega_{\mathbf{k}} t}\ c^{\dagger}_{\mathbf{k}}$.

Veamos el primero:

$$c_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{i\frac{H_0 t}{\hbar}}\ c_{\mathbf{k}}\ e^{-i\frac{H_0 t}{\hbar}} = c_{\mathbf{k}} + i\left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right] + \frac{i^2}{2!}\left[\frac{H_0 t}{\hbar}, \left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right]\right] + ...$$

La clave está en analizar el conmutador $\left[\dfrac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right]$.

Auxiliares:

- $\left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right] = \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} t \left[c^\dagger_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\right] = \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} t \left(c^\dagger_{\mathbf{k}'} \left[c_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\right] + \left[c^\dagger_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\right] c_{\mathbf{k}'}\right).$
- $AB = \frac{1}{2}\left(\{A,B\} + [A,B]\right) \Longrightarrow [A,B] = 2\ AB - \{A,B\}.$

Caso bosones:

$[c_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}] = 0.$

$\left[c^\dagger_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\right] = -\left[c_{\mathbf{k}}, c^\dagger_{\mathbf{k}'}\right] = -\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}.$

$\Longrightarrow \left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right] = -\sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} t\ \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\ c_{\mathbf{k}'} = -\omega_{\mathbf{k}} t\ c_{\mathbf{k}}.$

Caso fermiones:

$[c_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}] = 2\ c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} - \overbrace{\{c_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\}}^{=0}.$

$\left[c^\dagger_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\right] = 2\ c^\dagger_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} - \overbrace{\{c^\dagger_{\mathbf{k}'}, c_{\mathbf{k}}\}}^{=\{c_{\mathbf{k}}, c^\dagger_{\mathbf{k}'}\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}}.$

$\Longrightarrow \left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right] = \sum_{\mathbf{k}'} \omega_{\mathbf{k}'} t \left(2\ c^\dagger_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}} + 2\ c^\dagger_{\mathbf{k}'} \overbrace{c_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}'}}^{=-c_{\mathbf{k}'} c_{\mathbf{k}}} - \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}\ c_{\mathbf{k}'}\right) = -\omega_{\mathbf{k}} t\ c_{\mathbf{k}}.$

Es decir, para ambos casos se cumple:

$$\left[\frac{H_0 t}{\hbar}, ..., \left[\frac{H_0 t}{\hbar}, \left[\frac{H_0 t}{\hbar}, c_{\mathbf{k}}\right]\right] ...\right] = (-\omega_{\mathbf{k}} t)^n c_{\mathbf{k}} \tag{8}$$

$\Longrightarrow c_{\mathbf{k}}(t)_I = c_{\mathbf{k}} + i(-\omega_{\mathbf{k}} t) c_{\mathbf{k}} + \frac{i^2}{2!}(-\omega_{\mathbf{k}} t)^2 c_{\mathbf{k}} + ... = \left[1 + i(-\omega_{\mathbf{k}} t) + \frac{i^2}{2!}(-\omega_{\mathbf{k}} t)^2 + ...\right] c_{\mathbf{k}},$

entonces:

$$\boxed{c_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{-i\omega_{\mathbf{k}} t} c_{\mathbf{k}}} \tag{9}$$

Aplicando análogo razonamiento, se llega también a que:

$$\boxed{c^\dagger_{\mathbf{k}}(t)_I = e^{i\omega_{\mathbf{k}} t} c^\dagger_{\mathbf{k}}} \tag{10}$$