

Física de Muchos Cuerpos – Guía 5 – Ejercicio 1

(a) El Hamiltoniano del sistema es:

$$H = -t \sum_{\delta, j} c_{j+\delta}^\dagger c_j. \quad (1)$$

donde $\delta = \pm 1$ y $j = 1, \dots, N$ abarca los sitios de la red 1D con condiciones periódicas de contorno. Los valores de δ muestran que el *hopping* se da únicamente entre iones que son primeros vecinos.

La transformación que nos proponen es:

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikja} c_k. \quad (2)$$

Si usamos este operador para obtener c_j^\dagger e introducimos las expresiones tanto de este como de c_j en (1), obtenemos:

$$\begin{aligned} H &= -t \sum_{\delta, j} \sum_{k, k'} e^{-ik(j+\delta)a} c_k^\dagger e^{ik'ja} c_{k'} \\ &= -t \sum_{\delta, j} \sum_{k, k'} e^{-i\delta ka} e^{i(k'-k)ja} c_k^\dagger c_{k'} \\ &= -t \sum_j \sum_{k, k'} 2 \cos(ka) e^{i(k'-k)ja} c_k^\dagger c_{k'} \\ &= -2t \sum_{k, k'} \cos(ka) c_k^\dagger c_{k'} \sum_j e^{i(k'-k)ja} \\ &= -2t \sum_{k, k'} \cos(ka) c_k^\dagger c_{k'} 2\pi \delta_{ka, k'a} \\ &= -4\pi t \sum_k \cos(ka) c_k^\dagger c_k. \end{aligned} \quad (3)$$

De la última expresión podemos identificar las energías:

$$\varepsilon_k = -4\pi t \cos(ka). \quad (4)$$

Aquí, k está discretizado: $k = 2n\pi/L = 2n\pi/Na$, que es el número de iones en la red. La Fig. 1 muestra esta curva para $N = 100$.

(b) El caso 2D es similar. Ahora tenemos cuatro índices: dos para indicar la posición en la red cuadrada, y dos para indicar el (primer) vecino hacia (o desde) el cual se produce el salto. Esto es,

$$H = -t \sum_{j_x, j_y, \delta, \delta'} c_{j_x+\delta, j_y+\delta'}^\dagger c_{j_x, j_y}. \quad (5)$$

Supondremos que el acoplamiento $-t$ es el mismo para todos los sitios. Puesto que la red es cuadrada, $1 \leq j_x, j_y \leq N$ con condiciones periódicas de contorno; y $\delta, \delta' = \pm 1$.

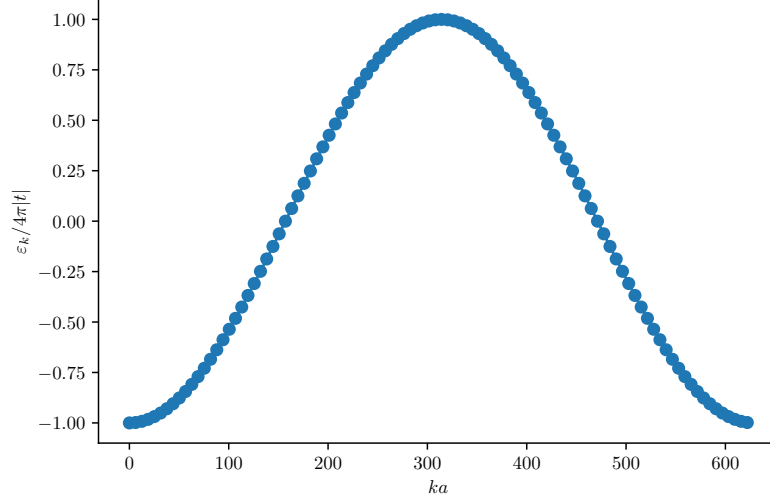


Figura 1: Espectro normalizado.

Ahora podemos proponer una diagonalización similar, con dos parámetros k_x y k_y :

$$c_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k_x, k_y} e^{ik_x j_x a} e^{ik_y j_y a} c_{k_x, k_y}. \quad (6)$$

Podemos hacer lo mismo que antes: introducir c_{ij} y c_{ij}^\dagger en el Hamiltoniano (5), y operar separando las sumatorias en los índices j_x y j_y , a fin de que aparezcan las respectivas deltas en las variables k_x, y . Es decir:

$$\begin{aligned}
H &= -t \sum_{\substack{k_x, k'_x \\ k_y, k'_y \\ j_x, j_y \\ \delta, \delta'}} \frac{1}{N^2} e^{-ik_x a \delta - ik_y a \delta'} e^{i(k'_x - k_x) j_x a} e^{i(k'_y - k_y) j_y a} c_{k'_x, k'_y}^\dagger c_{k_x, k_y} \\
&= -\frac{t}{N^2} \sum_{\substack{k_x, k'_x \\ k_y, k'_y \\ \delta, \delta'}} e^{-ik_x a \delta - ik_y a \delta'} c_{k'_x, k'_y}^\dagger c_{k_x, k_y} \sum_{j_x} e^{i(k'_x - k_x) j_x a} \sum_{j_y} e^{i(k'_y - k_y) j_y a} \\
&= -\frac{t}{N^2} \sum_{\substack{k_x, k'_x \\ k_y, k'_y \\ \delta, \delta'}} e^{-ik_x a \delta - ik_y a \delta'} c_{k'_x, k'_y}^\dagger c_{k_x, k_y} (2\pi)^2 N^2 \delta_{k_x a, k'_x a} \delta_{k_y a, k'_y a} \\
&= -4t\pi^2 \sum_{\substack{k_x, k_y \\ \delta, \delta'}} e^{-ik_x a \delta - ik_y a \delta'} c_{k_x, k_y}^\dagger c_{k_x, k_y} \\
&= -16t\pi^2 \sum_{k_x, k_y} \cos(k_x a) \cos(k_y a) c_{k_x, k_y}^\dagger c_{k_x, k_y}.
\end{aligned} \quad (7)$$

Las energías son, entonces,

$$\varepsilon_{k_x, k_y} = -16\pi^2 t \cos(k_x a) \cos(k_y a). \quad (8)$$

La discretización de k_x y k_y es la misma que en el caso 1D, ya que la red es cuadrada. La Fig. 2 muestra los contornos de energía constante para $N = 100$.

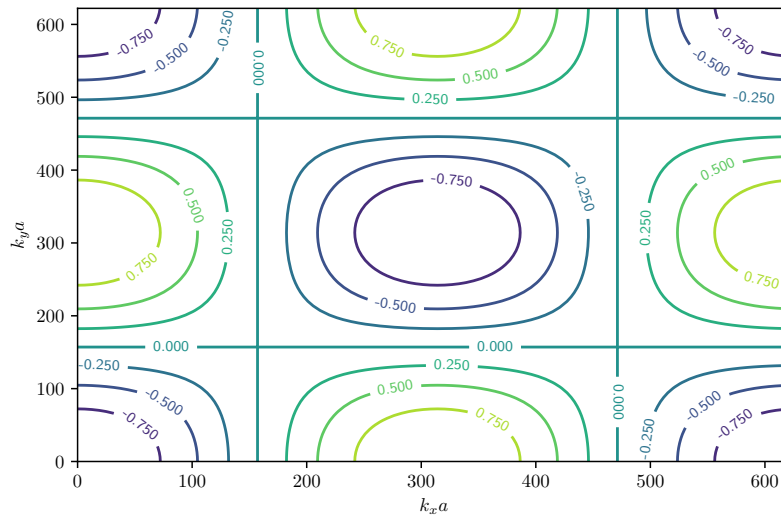


Figura 2: Contornos de $\varepsilon_{k_x, k_y} / 16\pi^2 |t|$ constante.