

Guía 7: Ej. 1

Escribir algunos diagramas y las fórmulas correspondientes a los diagramas conexos de primer y segundo orden de:

- (a) Amplitud de vacío
- (b) Función de Green

Cuáles son los núlos en la representación de momento si hay invarianza traslacional?

(Comentario previo: sin perder generalidad no vamos a estar considerando el grado de libertad orogado por el spin.)

Repaso: Motivación para los Diagramas de Feynman

Siguiendo el procedimiento de *prendido adiabático* se llega a al siguiente expresión perturbativa para la función de Green:

$$iG_{\alpha\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\langle \phi_0 | U_\epsilon(\infty, -\infty) | \phi_0 \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n \times e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} \langle \phi_0 | T \{ V(t_1)_I \dots V(t_n)_I \psi_\alpha(rt)_I \psi_\beta^\dagger(r't')_I \} | \phi_0 \rangle \quad (1)$$

donde $V(t)_I$ se puede expresar en segunda cuantización en dos bases diferentes:

- operadores de creación y aniquilación: (como vimos en clase)

$$V(t)_I = \frac{1}{2} \sum_{ijkl} \langle ij | v | kl \rangle c_i^\dagger(t)_I c_j^\dagger(t)_I c_l(t)_I c_k(t)_I \quad (2)$$

- operadores de campo: (el que vamos a estar usando un poco más)

$$V(t)_I = \frac{1}{2} \int dx \int dx' v(x, x') \psi^\dagger(xt)_I \psi^\dagger(x't)_I \psi(x't)_I \psi(xt)_I \quad (3)$$

Entonces al reemplazar las expresiones de segunda cuantización en (1), quedan valores medios de productos temporalmente ordenados:

$$\langle \phi_0 | T \left\{ \left\{ \begin{array}{l} c_i^\dagger(t_1) c_j^\dagger(t_1) c_l(t_1) c_k(t_1) \dots \\ \psi^\dagger(x_1 t_1) \psi^\dagger(x'_1 t_1) \psi(x'_1 t_1) \psi(x_1 t_1) \dots \end{array} \right\} \psi_\alpha(rt)_I \psi_\beta(r't')_I \right\} | \phi_0 \rangle$$

Sobre esto aplicamos el Teorema de Wick. Debido a que el producto temporalmente ordenado está en un valor medio;

$$\langle \phi_0 | T \{ \dots \} | \phi_0 \rangle$$

hay dos soluciones posibles:

1. $=0$ \rightarrow cuando quedan dos operadores sin contraer
2. $\neq 0$ \rightarrow cuando todos los operadores están contraídos

Para el caso (2) queda una suma de operadores contraídos y usando

$$\boxed{iG^{(0)}(jt, kt') = \overbrace{c_j(t)_I c_k^\dagger(t')_I}$$

$$\boxed{-iG^{(0)}(yt, xt^+) = \underbrace{\psi^\dagger(xt)_I \psi(yt)_I}$$

queda todo expresado en término de combinaciones de propagadores libres. La forma mas cómoda de para exponer las distintas maneras de contraer y cuales son las contribuciones es mediante los diagramas de Feynman.

Recordamos el enunciado: [Escribir algunos diagramas y las fórmulas correspondientes a los diagramas conexos de primer y segundo orden de:](#)

(a) Amplitud de vacío

(b) Función de Green

[Cuáles son los nulos en la representación de momento si hay invarianza traslacional?](#)

El plan es el siguiente: para el ítem (a) vamos a ir desde las cuentas a los diagramas y para el ítem (b) vamos a ir desde los diagramas hacia las cuentas haciendo uso de las *reglas de Feynman*.

Amplitud de vacío

Al igual que la función de Green, la amplitud de vacío también puede ser expresado en forma de serie de potencia usando el desarrollo de la serie de Dyson pesado por el término adiabático:

$$\langle \phi_0 | U_\epsilon(\infty, -\infty) | \phi_0 \rangle = (i)^n \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \dots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \dots + |t_n|)} \langle \phi_0 | V(t_1)_I \dots V(t_n)_I | \phi_0 \rangle \quad (4)$$

SIEMPRE se toma $\hbar = 1$. Cada $V(t)_I$ tenemos que expresarlos en segunda cuantización como esta desarrollado en (2) y (3), en este caso vamos a trabajar con los operadores de campo. Tenemos todos los ingredientes, entonces podemos analizar la amplitud de vacío orden a orden.

Orden uno \rightarrow tenemos un solo potencial $V(t_1)_I$

$$\langle \phi_0 | U_\epsilon^{(1)} | \phi_0 \rangle = (-i) \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx'_1 v(x_1, x'_1) \langle \phi_0 | \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{red}} | \phi_0 \rangle \quad (5)$$

En definitiva tengo que calcular el valor medio marcado con rojo:

$$\begin{aligned} M &= \langle \phi_0 | \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{red}} | \phi_0 \rangle \\ &= \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{red}} + \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{\text{red}} \\ &= - \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{\text{red}} \underbrace{\psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{red}} + \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{red}} \underbrace{\psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{\text{red}} \\ &= -(-iG^{(0)}(x_1 t_1, x_1 t_1^+))(-iG^{(0)}(x_1 t_1, x'_1 t_1^+)) + (-iG^{(0)}(x_1 t_1, x_1 t_1^+))(-iG^{(0)}(x'_1 t_1, x'_1 t_1^+)) \end{aligned} \quad (6)$$

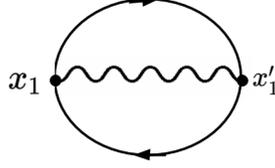
Donde se aplicó el Teorema de Wick versión pairing y las reglas de anticonmutación de los operadores de campo (estamos asumiendo siempre que estamos trabajando con

fermiones).

Ahora reemplazando lo anterior en la ecuación (5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \langle \phi | U_\epsilon | \phi_0 \rangle &= \frac{-i}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \int dx_1 \int dx'_1 v(x_1, x'_1) G^{(0)}(x'_1 t_1, x_1 t_1^+) G^{(0)}(x_1 t_1, x'_1 t_1^+) \\ &\quad - \frac{-i}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \int dx_1 \int dx'_1 v(x_1, x'_1) G^{(0)}(x_1 t_1, x_1 t_1^+) G^{(0)}(x'_1 t_1, x'_1 t_1^+) \end{aligned} \quad (7)$$

Los diagramas se dibujan primero marcando en el espacio las coordenadas tomando que el tiempo aumenta hacia arriba. En este caso el tiempo es el mismo t_1 entonces x_1 y x'_1 están sobre la misma línea. Luego se dibujan las interacciones $v(x, x')$ conectando los vértices mediante una línea ondulada. Finalmente se conectan las líneas mirando los propagadores libres y recordando que el orden del flujo de las partículas es $G^{(0)}$ (final, inicio). Para el primer término:



Para el segundo término:



Orden dos

Tomando $n=2$ de la ecuación (4):

$$\langle \phi_0 | U_\epsilon^{(2)} | \phi_0 \rangle = (-i)^2 \int dt_1 e^{-\epsilon(|t_1|+|t_2|)} \langle \phi_0 | V(t_1)_I V(t_2)_I | \phi_0 \rangle \quad (8)$$

Cada potencial se desarrolla en segunda cuantización de la siguiente manera:

$$V(t_1)_I = \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx'_1 v(x_1, x'_1) \psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I$$

$$V(t_2)_I = \frac{1}{2} \int dx_2 \int dx'_2 v(x_2, x'_2) \psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x'_2 t_2)_I \psi(x_2 t_2)_I$$

Entonces juntando todo, el valor medio que tenemos que calcular es:

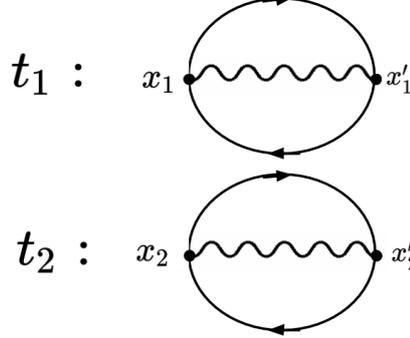
$$M = \langle \phi_0 | \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{\text{viene de } V(t_1)_I} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x'_2 t_2)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{\text{viene de } V(t_2)_I} | \phi_0 \rangle \quad (9)$$

Al igual que antes aplicamos el Teorema de Wick versión pairing y las reglas de anti conmutación de los operadores de campo. Se puede observar fácilmente que la cosa se complica dado que en este caso hay muchas manera de combinar 8 campos de a dos y acá es donde brillan los diagramas. Ahora solo vamos a ver algunas contribuciones como pide el enunciado.

La primera manera que se nos ocurre aparear sin que se anule el término es:

$$\begin{aligned} M_1 &= \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{(-1)(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x'_2 t_2)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{(-1)(-1)} \\ &= (-1)(-1) \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{(-iG^{(0)}(x'_1 t_1, x_1 t_1))} \underbrace{\psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{(-iG^{(0)}(x_1 t_1, x'_1 t_1))} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi(x'_2 t_2)_I}_{(-iG^{(0)}(x'_2 t_2, x_2 t_2))} \underbrace{\psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{(-iG^{(0)}(x_2 t_2, x'_2 t_2))} \\ &= (-1)(-1)(-iG^{(0)}(x'_1 t_1, x_1 t_1))(-iG^{(0)}(x_1 t_1, x'_1 t_1))(-iG^{(0)}(x'_2 t_2, x_2 t_2))(-iG^{(0)}(x_2 t_2, x'_2 t_2)) \end{aligned} \quad (10)$$

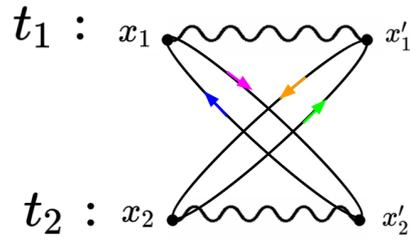
Se aplicó las reglas de anti conmutación de los campos para poder asociar con los propagadores libres. Para poder dibujar los diagramas, arbitrariamente elegimos $t_2 < t_1$. Por lo tanto, el diagrama de este término es el siguiente:



Como todos los vértices no están conectados entre sí, es un *diagrama no conexo*. El ejercicio pide diagramas conexos, entonces este no es válido. Ahora veamos un diagrama que sea conexo, para eso tomamos contracciones que relacione x_i con x_j para $i \neq j$.

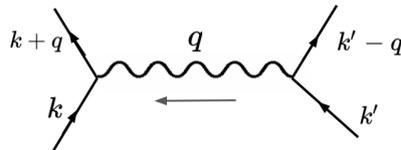
$$\begin{aligned} M_2 &= \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x'_1 t_1)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{(-1)^5} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x'_2 t_2)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{(-1)^4} \\ &= (-1)^5 \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x'_2 t_2)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x'_2 t_2)_I}_{(-1)} \\ &= (-1)^5 (-1)^4 (-1) \underbrace{\psi^\dagger(x_1 t_1)_I \psi(x'_2 t_2)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x'_1 t_1)_I \psi(x_2 t_2)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x_2 t_2)_I \psi(x'_1 t_1)_I}_{(-1)} \underbrace{\psi^\dagger(x'_2 t_2)_I \psi(x_1 t_1)_I}_{(-1)} \\ &= (-1)^{12} (-iG^{(0)}(x'_2 t_2, x_1 t_1))(-iG^{(0)}(x_2 t_2, x'_1 t_1))(-iG^{(0)}(x'_1 t_1, x_2 t_2))(-iG^{(0)}(x_1 t_1, x'_2 t_2)) \end{aligned} \quad (11)$$

En forma de diagrama:

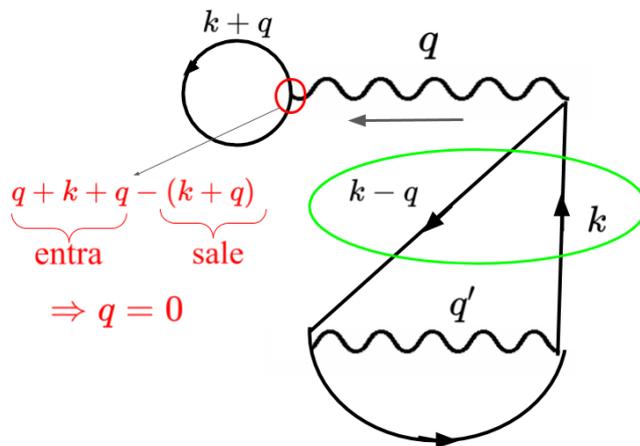


En este caso es un diagrama conexo dado que todos los vértices están conectados entre sí.

Analizamos que pasa en una invarianza traslacional, en dicho caso se conserva el momento en cada vértice. Entonces miremos el siguiente ejemplo:



Entra una partícula con momento k y k' , el vertice tiene el momento q que le asignamos un movimiento arbitrario hacia la izquierda. En dicho caso para que se conserve el momento, los momentos de las partículas no puede ser arbitrarios, si no que deben ser $k+q$ y $k'-q$ respectivamente. Ahora miremos el siguiente diagrama pero considerado que el sistema satisface la invarianza traslacional:

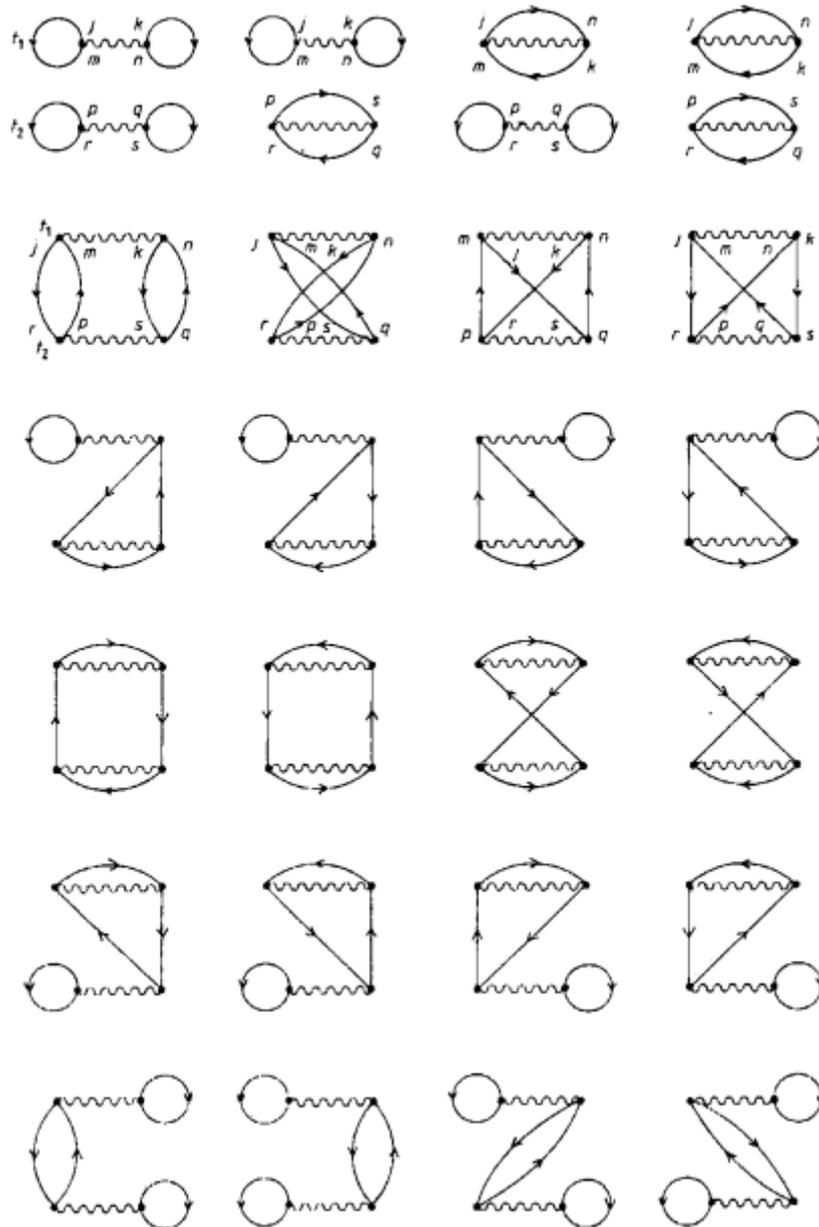


Miremos nada mas la interacción de arriba, marcada en rojo. Mirando el loop de la derecha, vemos que entra el momento q entonces tiene que salir una partícula de momento

$k+q$, pero como es un loop la misma partícula que sale tiene que entrar con momento $k+q$. Plantenado la conservación del momento sobre ese vértice:

$$q + k + q - (k + q) = 0 \Rightarrow q = 0 \tag{12}$$

Luego aplicando lo anterior a lo marcado en verde, nos dice que la partícula y hueco tienen el mismo momento k . Luego de pensarlo un rato uno se da cuenta que es un absurdo dado que las partículas tienen momento por fuera de la esfera de Fermi ($k > k_f$) mientras que los huecos tienen momento por dentro de la esfera ($k < k_f$).¹ Entonces la contribución asociado a dicho diagrama se anula. A continuación miramos todos los diagramas de orden 1 y 2 para amplitud de vacío (Sacado del Gross).



¹Esto es por definición, lo vimos en clase.

Mirando fuerte, uno se puede convencer que por los argumentos que dijimos antes todas las contribuciones de estos diagramas se anulan.

Contracciones y pairing en L^AT_EX

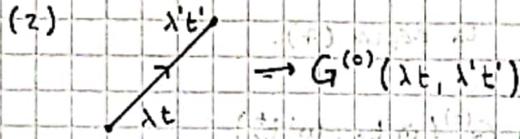
En este texto se utilizó el paquete simplewick.

Documentación: <http://tug.ctan.org/tex-archive/macros/latex/contrib/simplewick/simplewick.pdf>

Consultado el 26/11/20.

REGLAS DE FEYNMAN

(1) EJE TEMPORAL HACIA ARRIBA

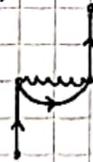


(5) INDICES Y COORDENADAS DE VÉRTICES INTERNOS \rightarrow SE SUMAN / INTEGRAN:
 POR CADA INTEGRACIÓN TEMPORAL SE AÑADE $e^{-E|t|}$

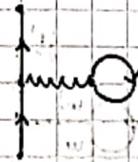
(6) SI TENGO LAZOS CERRADOS FORMADOS POR LÍNEAS DE $G^{(0)} \rightarrow$ AÑADO $(-1)^L$

(7) PARA ORDEN n : $\frac{i^n}{2! 2^n}$ EN GENERAL. PARA DIAGRAMAS NO-INDEXADOS Y CONECTADOS DE LA FUNCIÓN DE GREEN ES i^n .

ORDEN 1: (1)



(2)



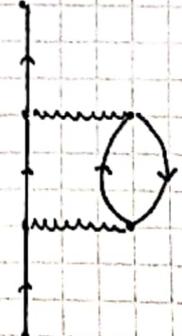
ORDEN 2: (3)



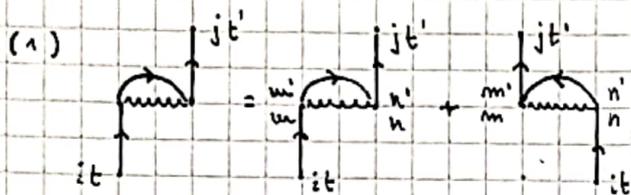
(4)



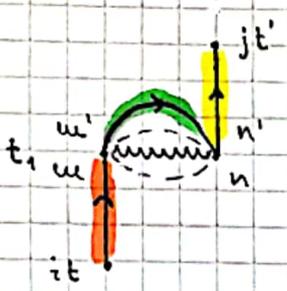
(5)



ORDEN 1: EN CADA FAMILIA TENEMOS $1! 2^1 = 2$ MIEMBROS.



COMO SON ANÁLOGOS, POR SER LOS INDICES INTERNOS MUDOS, CALCULAMOS UNO Y USAMOS LA "VARIANTE" DE LA REGLA (7). $\left[2 \cdot \frac{i^1}{2^1 \cdot 1!} = i \right]$



- $G^{(0)}(u t_1, i t)$
- $G^{(0)}(n t_1, u' t_1^+)$
- $G^{(0)}(j t', n' t_1)$ o $\langle u n | \psi | u' n' \rangle$

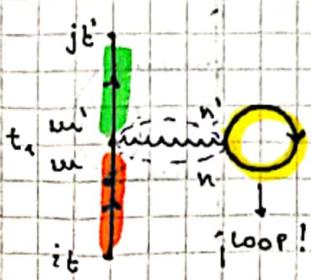
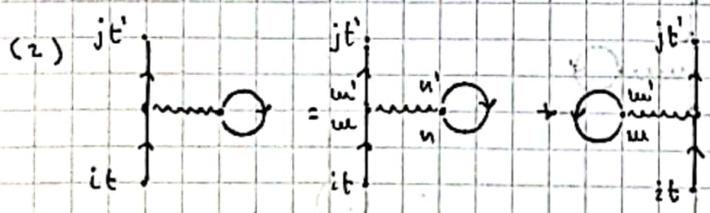
→ INTEGRAR SOBRE t_1 Y SUMAR SOBRE $u n u' n'$.
 → NO TENGO LOOPS $\Rightarrow l=0 : (-1)^0 = 1$.

→ ESTE DIAGRAMA ES DE ORDEN $i : i^1 = i^1 = i$.
 → AGREGAR EL FACTOR $e^{-\epsilon |t_1|}$ YA QUE INTEGRAR SOBRE t_1 .

$$= i \int dt_1 \sum_{\substack{u u' \\ n n'}} \langle u n | \psi | u' n' \rangle G^{(0)}(u t_1, i t) G^{(0)}(n t_1, u' t_1^+) \cdot G^{(0)}(j t', n' t_1) e^{-\epsilon |t_1|}$$

\Rightarrow TOMANDO $\psi_{u n u' n'} = \langle u n | \psi | u' n' \rangle$

$$= i \int dt_1 \sum_{\substack{u u' \\ n n'}} \psi_{u n u' n'} G^{(0)}(u t_1, i t) G^{(0)}(n t_1, u' t_1^+) G^{(0)}(j t', n' t_1) e^{-\epsilon |t_1|}$$



- $G^{(0)}(u t_1, i t)$
- $G^{(0)}(j t', u' t_1)$
- $G^{(0)}(u t_1, n' t_1^+)$
- $\langle u n | \psi | u' n' \rangle = \psi_{u n u' n'}$

→ INTEGRAR SOBRE t_1 , AGREGAR $e^{-\epsilon |t_1|}$ Y SUMAR SOBRE $u n u' n'$

→ TENSO $l=1$ LOOP $\Rightarrow (-1)^l = -1$.

→ ORDEN 1 $\Rightarrow i^1 = i$.

$$\int_{it}^{jt'} \text{---} \bigcirc \text{---} = (-i) \int dt_1 \sum_{\substack{uu' \\ nn'}} U_{uu'} G^{(0)}(ut_1, it) G^{(0)}(jt', ut_1) G^{(0)}(nt_1, n't_1) e^{-\epsilon|t|}$$

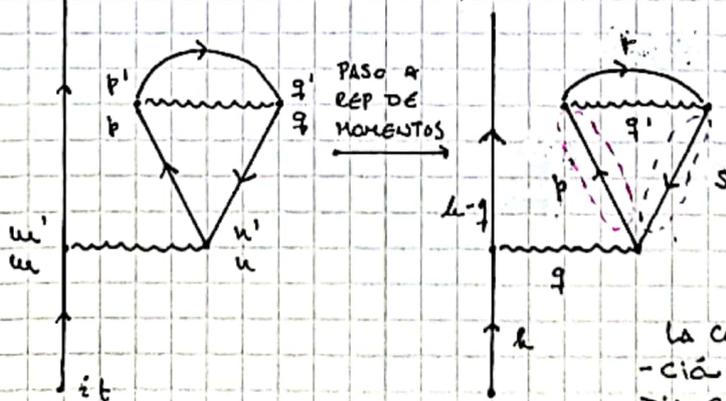
ORDEN 2: EN CADA FAMILIA HAY $2!2^2 = 8$ MIEMBROS (DEMASIADOS PARA ANDAR DIBUJANDO).

(3)

$\langle uu' | U | u'n' \rangle = U_{uu' n'n'}$
 $\langle pq | U | p'q' \rangle = U_{pp' qq'}$
 → SUMO SOBRE $uu'n'n', pp'qq'$
 → INTEGRAL SOBRE t_1, t_2 Y ASEROSO $e^{-\epsilon(|t_1|+|t_2|)}$
 → ORDEN 2 $\Rightarrow (i)^2 = -1$.
 → NO HAY LOOPS $\Rightarrow (-1)^0 = 1$

$$\int_{it}^{jt'} \text{---} \bigcirc \text{---} = (-1) \int dt_2 \int dt_1 \sum_{\substack{uu' \\ nn'}} \sum_{\substack{pp' \\ qq'}} U_{uu' n'n'} U_{pp' qq'} G^{(0)}(ut_1, it) G^{(0)}(nt_1, ut_1) \times G^{(0)}(pt_2, n't_1) G^{(0)}(qt_2, p't_2) G^{(0)}(jt', q't_2) e^{-\epsilon(|t_1|+|t_2|)}$$

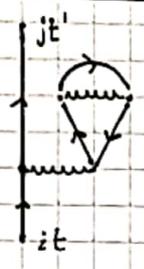
(4) → HAY UN LOOP $\Rightarrow (-1)$.



→ VEMOS QUE SI HAY INVARIANCIA TRANSLACIONAL \Rightarrow LA PARTICULA Y EL HUECO TIENEN AMBOS MOMENTO \vec{k} . PERO ESTO ES ABS Y A QUE LA CONDICION DE HUECO ES $k < k_F$ Y DE PARTICULA $k > k_F$.

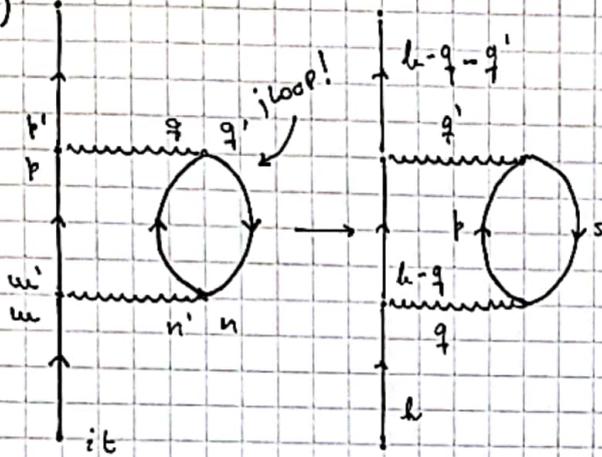
LA CONTRIBUCION DE ESTE DIAGRAMA ES 0.

→ DE TODAS FORMAS, DE NO TENER TAL INVARIANCIA LA CONTRIBUCIÓN ES:



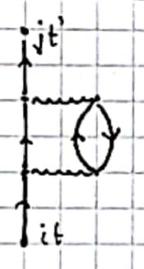
$$= \int dt_2 \int dt_1 \sum_{\substack{u u' \\ n n'}} \sum_{\substack{p p' \\ q q'}} \nu_{u u'} \nu_{p p'} G^{(0)}(u t_1, i t) G^{(0)}(j t', u' t_1) \times \\ \times G^{(0)}(p t_2, n' t_1) G^{(0)}(q t_2, p' t_2) G^{(0)}(n t_1, q' t_2) e^{-\epsilon(|t_1| + |t_2|)}$$

(5)



→ PODRÍAMOS PENSAR QUE ESTE TAMBIÉN SE ANULA CON INVARIANCIA TRASLACIONAL PERO NO ES ASÍ. ESTO SOLO IMPONE LA CONDICIÓN $q = -q'$.

→ ACÁ TENEMOS UN LOOP (-1) Y EL HECHO DE QUE ES DE ORDEN 2 $i^2 = -1$.



$$= \int dt_2 \int dt_1 \sum_{\substack{u u' \\ n n'}} \sum_{\substack{p p' \\ q q'}} \nu_{u u'} \nu_{p p'} G^{(0)}(u t_1, i t) G^{(0)}(p t_2, u' t_1) \times \\ \times G^{(0)}(j t', p' t_2) G^{(0)}(q t_2, n' t_1) G^{(0)}(n t_1, q' t_2) e^{-\epsilon(|t_1| + |t_2|)}$$