Partículas idénticas: Ejercicios

1. Let h_0 be the Hamiltonian of a particle. Assume that the operator h_0 acts only on the orbital variables and has three equidistant levels of energies 0, $\hbar\omega_0$, $2\hbar\omega_0$ (where ω_0 is a real positive constant) which are non-degenerate in the orbital state space $\mathscr{E}_r$ (in the total state space, the degeneracy of each of these levels is equal to $2s + 1$, where s is the spin of the particle). From the point of view of the orbital variables, we are concerned only with the subspace of $\mathscr{E}_r$ spanned by the three corresponding eigenstates of h_0.

a. Consider a system of three independent electrons whose Hamiltonian can be written:

$$H = h_0(1) + h_0(2) + h_0(3)$$

Find the energy levels of H and their degrees of degeneracy.

b. Same question for a system of three identical bosons of spin 0.

Partículas idénticas: Ejercicios

2. Fermiones, antisimetrización, singlete y triplete

Sean dos electrones confinados en un potencial, y supongamos que alcanza con trabajar con dos orbitales |α>, |β>. Considerando también el grado de libertad de espín (ver la sección X-B de suma de dos espines ½, y en concreto Ecs. B-22 y B-23), escribir los autoestados de H de los dos electrones y sus energías.

El estado fundamental es triplete o singlete?

Expresar también los estados usando los estados de espín no acoplados (|s1,s2>).

3. Leer los enunciados de los problemas 3, 7, 8.I y 9.I del capítulo XIV del Cohen, que están incluídos en el complemento D_{XIV}.

FÍSICA DE MUCHOS CUERPOS
SEGUNDO CUATRIMESTRE 2020

HOJA:
FECHA 31/08/2020

Partículas idénticas - Ejercicio 1

Hamiltoniano h_0, en variables orbitales

$\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \hbar\omega_0$, $\varepsilon_3 = 2\hbar\omega_0$

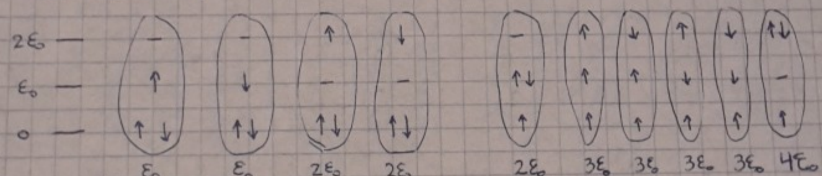
(Espin s, degeneración $2s+1$ de cada nivel.)

Espacio de estados orbitales: $\mathcal{E}_{\vec{r}}$

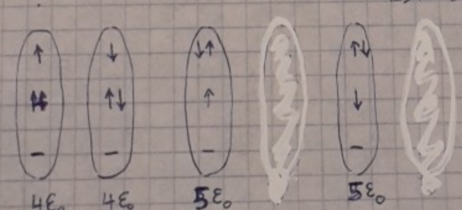
(a) Considerar un sistema de 3 electrones independientes con Hamiltoniano: $H = h_0(1) + h_0(2) + h_0(3)$

Encontrar los niveles de energía de H y su degeneración.

Sea $\varepsilon_0 = \hbar\omega_0$



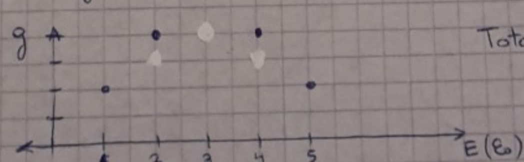
Esto se repite con ↓ en ε_1



6 orbitales
3 fermiones

$g(\varepsilon_0) = 2$ $\quad g(3\varepsilon_0) = 8$ $\quad g(5\varepsilon_0) = 2$

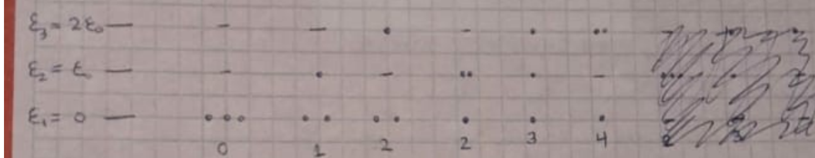
$g(2\varepsilon_0) = 4$ $\quad g(4\varepsilon_0) = 4$



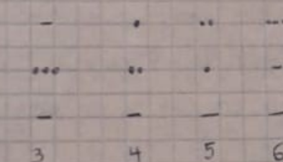
Total = 20

NOTA

(b) Encontrar niveles de energía y degeneración para 3 bosones de espin 0

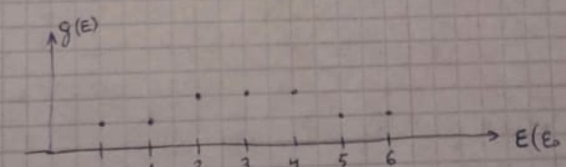


~~Ahora hago lo mismo intercambiando los roles de ε_1 y ε_2~~



$g(0) = 1$ $\quad g(2) = 2$ $\quad g(4) = 2$ $\quad g(6) = 1$

$g(1) = 1$ $\quad g(3) = 2$ $\quad g(5) = 1$



Total de estados: 10

Partículas idénticas 3/9/2020

2. Fermiones, antisimetrización, singlete y Triplete.

ε_β — $|\beta\rangle$
ε_α — $|\alpha\rangle$

$$|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right) \qquad S=0$$

$$\left.\begin{aligned} |11\rangle &= |++\rangle \\ |10\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle + |-+\rangle\right) \\ |1,-1\rangle &= |--\rangle \end{aligned}\right\} S=1$$

$$|\psi_1\rangle = |\alpha\rangle|\alpha\rangle\,|00\rangle = |1:\alpha, 2:\alpha\rangle\,|00\rangle$$
$$\alpha(1)\,\alpha(2)\,|00\rangle \qquad \varepsilon_1 = 2\varepsilon_\alpha$$

$$|\psi_2\rangle = |\beta\rangle|\beta\rangle\,|0,0\rangle = |1:\beta, 2:\beta\rangle\,|0,0\rangle$$
$$= \beta(1)\,\beta(2)\,|0,0\rangle \qquad \varepsilon_2 = 2\varepsilon_\beta$$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)\right)|0,0\rangle \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha, 2:\beta\rangle + |1:\beta, 2:\alpha\rangle\right)|0,0\rangle$$

$$|\psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha, 2:\beta\rangle - |1:\beta, 2:\alpha\rangle\right)\,|1,1\rangle$$

$$|\psi_5\rangle = \quad '' \quad |1,0\rangle$$

$$|\psi_6\rangle = \quad '' \quad |1,-1\rangle$$

$$\varepsilon_4 = \varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta$$

$$g(2\varepsilon_\alpha) = 1 \qquad g(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) = 4 \qquad g(2\varepsilon_\beta) = 1$$

Ahora, sin usar la base acoplada de dos espines

$|a\rangle = |\alpha +\rangle$ $|b\rangle = |\alpha -\rangle$ $|c\rangle = |\beta +\rangle$ $|\beta -\rangle = |d\rangle$

$\lvert 1:a, 2:a\rangle$	$\lvert 1:b\rangle \lvert 2:a\rangle$	$\lvert 1:c\rangle \lvert 2:a\rangle$	$\lvert 1:d\rangle \lvert 2:a\rangle$
$\lvert 1:a, 2:b\rangle$	$\lvert 1:b\rangle \lvert 2:b\rangle$	$\lvert 1:c\rangle \lvert 2:b\rangle$	$\lvert 1:d\rangle \lvert 2:b\rangle$
$\lvert 1:a, 2:c\rangle$	$\lvert 1:b\rangle \lvert 2:c\rangle$	$\lvert 1:c\rangle \lvert 2:c\rangle$	$\lvert 1:d\rangle \lvert 2:c\rangle$
$\lvert 1:a, 2:d\rangle$	$\lvert 1:b\rangle \lvert 2:d\rangle$	$\lvert 1:c\rangle \lvert 2:d\rangle$	$\lvert 1:d\rangle \lvert 2:d\rangle$

Esos son los estados de la base producto.
A cada uno hay que aplicarle el operador A antisimetrizador.

$$A|1:a, 2:a\rangle = A|1:b\rangle|2:b\rangle = A|1:c\rangle|2:c\rangle = A|1:d\rangle|2:d\rangle = 0$$

Tienen repetido el "orbital" y están excluidos (Pauli)

$$A|1:a, 2:b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:a, 2:b\rangle - |2:a, 1:b\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha+\rangle|2:\alpha-\rangle - |1:\alpha-\rangle|2:\alpha+\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\alpha,\alpha\rangle|+,-\rangle - |\alpha\alpha\rangle|-+\rangle\right) = |\alpha\alpha\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$
$$= |\alpha\alpha\rangle\,|0,0\rangle = |\Psi_1\rangle$$

En total salen 6 estados a partir de los estados producto fuera de la diagonal.

$$A|1:a, 2:c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:a\rangle|2:c\rangle - |2:c\rangle|1:a\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha+\rangle|2:\beta+\rangle - |1:\beta+\rangle|2:\alpha+\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha, 2\beta\rangle - |1:\beta, 2:\alpha\rangle\right)|++\rangle = |\Psi_4\rangle$$

Partículas idénticas

Ejercicio 2

3/9/20

$$A|1:a,2:d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:a\rangle|2:d\rangle - |2:a,1:d\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha+\rangle|2:\beta-\rangle - |1:\beta-\rangle|2:\alpha+\rangle\right) = |\chi_1\rangle$$

No se puede factorizar para separar la parte espacial y la de espín.

$$A|1:b,2:c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:b\rangle|2:c\rangle - |1:c\rangle|2:b\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha-\rangle|2:\beta+\rangle - |1:\beta+\rangle|2:\alpha-\rangle\right) = |\chi_2\rangle$$

Es como el caso anterior.

$$A|1:b,2:d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:b\rangle|2:d\rangle - |1:d\rangle|2:b\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha-\rangle|2:\beta-\rangle - |1:\beta-\rangle|2:\alpha-\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha\rangle|2:\beta\rangle - |1:\beta\rangle|2:\alpha\rangle\right)\underbrace{|--\rangle}_{|1,-1\rangle} = |\psi_6\rangle$$

$$A|1:c,2:d\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:c\rangle|2:d\rangle - |1:d\rangle|2:c\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\beta+\rangle|2:\beta-\rangle - |1:\beta-\rangle|2:\beta+\rangle\right)$$
$$= |1:\beta,2:\beta\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$
$$= |\beta,\beta\rangle|0,0\rangle = |\psi_2\rangle$$

El subespacio $\{|\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle\} = \{|\psi_3\rangle, |\psi_5\rangle\}$

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha\rangle|2:\beta\rangle + |1:\beta\rangle|2:\alpha\rangle\right)|0,0\rangle$$

$$|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1:\alpha\rangle|2:\beta\rangle - |1:\beta\rangle|2:\alpha\rangle\right)|1,0\rangle$$

con $|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$

$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$

Entonces:

$$|\psi_3\rangle = \frac{1}{2}\left(|\alpha\beta\rangle + |\beta\alpha\rangle\right)\left(|+-\rangle - |-+\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(|\alpha\beta\rangle|+-\rangle - |\alpha\beta\rangle|-+\rangle + |\beta\alpha\rangle|+-\rangle - |\beta\alpha\rangle|-+\rangle\right)$$

Este estado debería ser una combinación lineal de $|\chi_1\rangle$ y $|\chi_2\rangle$

$$= \frac{1}{2}\left(|\alpha+,\beta-\rangle - |\alpha-,\beta+\rangle + |\beta+,\alpha-\rangle - |\beta-,\alpha+\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(|\alpha+,\beta-\rangle - |\beta-,\alpha+\rangle\right)}_{\sqrt{2}|\chi_1\rangle} - \underbrace{\left(|\alpha-,\beta+\rangle - |\beta+,\alpha-\rangle\right)}_{\sqrt{2}|\chi_2\rangle}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle\right)$$

Y entonces seguramente será: $|\psi_5\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle\right)$