Guía 4: ejercicio 2

Justo González Litardo

9 de Octubre 2020

Hallar la función de Green retardada en el dominio tiempo, $G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t')$, y en el dominio frecuencia, $G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$, para el gas de electrones libres y no interactuantes.

Para un gas de electrones libres y no interactuantes se tiene que $H = T$ y $(V = 0)$, por lo que las representaciones de Heisenberg e interacción son iguales. Como los electrones son fermiones, la función de Green retardada para este caso queda

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r'}t') = -i\theta(t-t') \langle\phi_0| \{\Psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I, \Psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'}t')_I\} |\phi_0\rangle \,. \tag{1}$$

Escribo los operadores de campo en la base de momentos:

$$\Psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I = \sum_k \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} e^{-i\epsilon_k t} c_{\mathbf{k}\alpha}$$

$$\Psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'}t')_I = \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k'}.\mathbf{r'}} e^{i\epsilon_{k'} t'} c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta},$$

con $\epsilon_k = \frac{k^2}{2m}$.
Desarrollo el anticonmutador con esta nueva base

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I, \Psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'}t')_I\} =$$

$$\sum_k \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} e^{-i\epsilon_k t} c_{\mathbf{k}\alpha} \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k'}.\mathbf{r'}} e^{i\epsilon_{k'} t'} c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} + \sum_{k'} \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{-i\mathbf{k'}.\mathbf{r'}} e^{i\epsilon_{k'} t'} c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} \sum_k \frac{1}{\sqrt{\Omega}} e^{i\mathbf{k}.\mathbf{r}} e^{-i\epsilon_k t} c_{\mathbf{k}\alpha}$$

$$\{\Psi_\alpha(\mathbf{r}t)_I, \Psi^\dagger_\beta(\mathbf{r'}t')_I\} = \frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \mathbf{k'}.\mathbf{r'})} e^{-i(\epsilon_k t - \epsilon_{k'} t')} (c_{\mathbf{k}\alpha} c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} + c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} c_{\mathbf{k}\alpha})$$

y la ecuación (1) queda

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t, \mathbf{r'}t') = -i\frac{1}{\Omega} \sum_{kk'} \theta(t-t') e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \mathbf{k'}.\mathbf{r'})} e^{-i(\epsilon_k t - \epsilon_{k'} t')} \langle\phi_0| (c_{\mathbf{k}\alpha} c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} + c^\dagger_{\mathbf{k'}\beta} c_{\mathbf{k}\alpha}) |\phi_0\rangle \,.$$

Como $|\phi_0\rangle$ es un determinante de Slater, van a aparecer deltas para los espines y los momentos, simplificando un poco la cuenta:

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r'}t') = -i\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Omega}\sum_k \theta(t-t')e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}e^{-i\epsilon_k(t-t')}\left[\langle\phi_0| c_{\mathbf{k}\alpha}c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle + \langle\phi_0| c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle\right]. \tag{2}$$

Analizando los dos brackets obtenidos, se deduce

$$\begin{cases}\langle\phi_0| c_{\mathbf{k}\alpha}c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle = \left\langle c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}\phi_0 \middle| c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}\phi_0\right\rangle = \theta(k-k_F)\\ \langle\phi_0| c^\dagger_{\mathbf{k}\alpha}c_{\mathbf{k}\alpha}|\phi_0\rangle = \langle c_{\mathbf{k}\alpha}\phi_0|c_{\mathbf{k}\alpha}\phi_0\rangle = \theta(k_F-k)\end{cases}$$

El primer caso se interpreta como la creación de una partícula. Debido a que el estado fundamental ocupa la toda la esfera de Fermi, es necesario que $k > k_F$ para que no se anule la cuenta. Si se creara una partícula dentro de la esfera de Fermi, existirían dos partículas ocupando el mismo estado, lo cual rompe el principio de exclusión de Pauli. Para el segundo caso se destruye la partícula en el estado k. Si ese estado está afuera de la esfera de Fermi, no existiría ninguna partícula ahí y se anularía la cuenta. Es necesario que $k \leq k_F$ porque se estaría aplicando el operador de destrucción sobre una partícula existente, ya que se trata del estado fundamental.

Aplico este resultado en la ecuación (2):

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r'}t') = -i\frac{\delta_{\alpha\beta}}{\Omega}\sum_k \theta(t-t')e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}e^{-i\epsilon_k(t-t')}\left[\theta(k-k_F)+\theta(k_F-k)\right]$$

y paso al espacio continuo de momentos

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r'}t') = -i\delta_{\alpha\beta}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}e^{-i\epsilon_k(t-t')}\theta(t-t')\left[\theta(k-k_F)+\theta(k_F-k)\right], \tag{3}$$

donde se usó

$$\sum_k f(\mathbf{k}) \longrightarrow \frac{\Omega}{(2\pi)^3}\int d^3k f(\mathbf{k})$$

Este resultado es equivalente a la transformada de Fourier para pasar al espacio de coordenadas de $G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t-t')$, es decir,

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{r}t,\mathbf{r'}t') = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}.(\mathbf{r}-\mathbf{r'})}G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t-t').$$

De esta manera, se obtiene

$$\boxed{G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},t-t') = -i\delta_{\alpha\beta}e^{-i\epsilon_k(t-t')}\theta(t-t')\left[\theta(k-k_F)+\theta(k_F-k)\right]}. \tag{4}$$

Para obtener $G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k},\omega)$, uso

$$\theta(\tau) = \lim_{\eta\longrightarrow 0^+}\frac{i}{2\pi}\int dw\frac{e^{-iw\tau}}{w+i\eta}$$

en la ecuación (4), quedando

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t') = -i \lim_{\eta \longrightarrow 0^+} \delta_{\alpha\beta} \int dw \frac{i}{2\pi} e^{-i(\epsilon_k + w)(t-t')} \left[\frac{\theta(k-k_F) + \theta(k_F - k)}{w + i\eta} \right]$$

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t') = \lim_{\eta \longrightarrow 0^+} \delta_{\alpha\beta} \int \frac{dw}{2\pi} e^{-i(\epsilon_k + w)(t-t')} \left[\frac{\theta(k-k_F) + \theta(k_F - k)}{w + i\eta} \right]$$

Mediante un cambio de variables $\omega = \epsilon_k + w$, se obtiene

$$G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, t-t') = \lim_{\eta \longrightarrow 0^+} \delta_{\alpha\beta} \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega(t-t')} \left[\frac{\theta(k-k_F) + \theta(k_F - k)}{\omega - \epsilon_k + i\eta} \right], \qquad (5)$$

que es equivalente a una transformada de Fourier de $G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega)$ integrando en frecuencias. Por lo tanto

$$\boxed{G^R_{\alpha\beta}(\mathbf{k}, \omega) = \lim_{\eta \longrightarrow 0^+} \delta_{\alpha\beta} \left[\frac{\theta(k-k_F) + \theta(k_F - k)}{\omega - \epsilon_k + i\eta} \right]}. \qquad (6)$$