

La clase pasada vimos:

- i) Diagramas de vacío
- ii) Propagador con tiempos iguales
- iii) Más reglas de Feynman
- iv) Diagramas de vacío $n=1,2$

Chapter 20

Feynman diagrams

Hoy vemos:

- i) Diagramas conectados y desconectados
- ii) Degeneraciones
- iii) Auto-energía
- iv) Ecuación de Dyson para la función de Green

Chapter 23

Diagrammatic calculation of the single-particle Green's function: Dyson's equation

Amplitud de vacío: Diagramas de Feynman

$$\langle \Phi_0 | U_\epsilon^{(1)} | \Phi_0 \rangle = -i \frac{1}{2} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \sum_{\substack{\lambda\mu \\ \lambda'\mu'}} \int d^3r_1 \int d^3r'_1 v_{\lambda\lambda'}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'_1) M$$

$$M = \langle \Phi_0 | \psi_\lambda^\dagger(\mathbf{r}_1 t_1) \psi_\mu^\dagger(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\mu'}(\mathbf{r}'_1 t_1) \psi_{\lambda'}(\mathbf{r}_1 t_1) | \Phi_0 \rangle$$

$$\underbrace{\psi^\dagger(xt)\psi(yt)} = -iG^{(0)}(yt, xt^+)$$

Pairing con tiempos iguales

Diagramas de vacío:



Directo



Intercambio

Teorema de los lazos, para determinar el signo global:

(6) El signo de un término de orden arbitrario es $(-1)^\ell$ donde ℓ es el número de lazos cerrados formado por líneas de $G^{(0)}$

REPASO

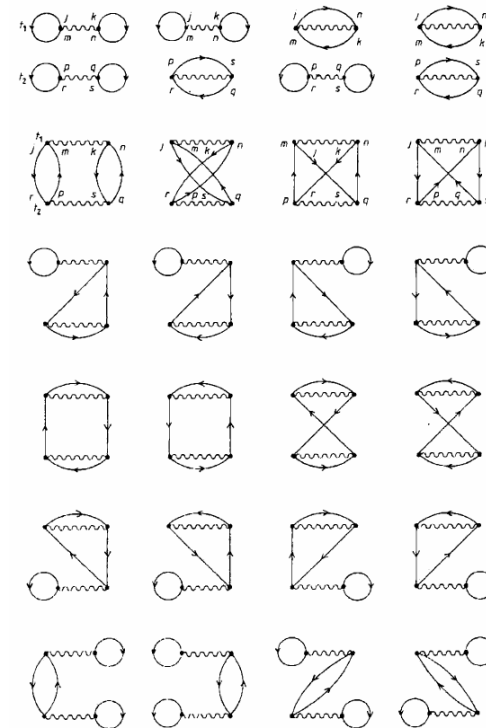
Cuántos diagramas hay en el orden n ?

}

$(2n)!$ amplitud de vacío

$(2n+1)!$ numerador de la G

Diagramas de vacío de segundo orden:



Diagramas conectados y desconectados

Dos resultados importantes:

(1) Los diagramas desconectados del numerador de la función de Green se cancelan con el denominador (la amplitud de vacío).

$$i\tilde{G}(j_1, R_1) = \left(\begin{array}{c} j_1 \\ \vdots \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ R_1 \end{array} + \text{diagrama 1} + \text{diagrama 2} + \text{diagrama 3} + \text{diagrama 4} + \text{diagrama 5} \right)$$
$$\left(1 + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} + \text{diagrama 8} + \dots \right)$$

$$\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle = 1 + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} + \text{diagrama 8} + \dots$$

Dos resultados importantes:

$$i\tilde{G}(jt, kt') = \left(\begin{array}{c} \text{diagrama 1} \\ + \\ \text{diagrama 2} \\ + \\ \text{diagrama 3} \\ + \\ \text{diagrama 4} \\ + \\ \text{diagrama 5} \end{array} \right)$$

$$\left(1 + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} + \dots \right)$$

$$\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle = 1 + \text{diagrama 6} + \text{diagrama 7} + \dots$$

Se ve que, a primer orden, se cancelan los diagramas desconectados de \tilde{G} con todo $\langle \Phi_0 | U(\infty, -\infty) | \Phi_0 \rangle$. Esto se verifica a todos los órdenes:

$$iG(jt, kt') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)}$$

$$\langle \Phi_0 | \mathcal{T} \left[v(t_1) \cdots v(t_n) c_j(t) c_k^\dagger(t') \right] | \Phi_0 \rangle_{\text{conectados}}$$

Dos resultados importantes:

(2) La amplitud de vacío se puede calcular considerando solo los diagramas Conectados – Teorema de Linked-clusters de Goldstone (1957).

$$\langle \Phi_0 | U | \Phi_0 \rangle = \exp [\langle \Phi_0 | U | \Phi_0 \rangle_L]$$

Entonces, el shift de la energía se puede calcular como:

$$\begin{aligned} \Delta E &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{\partial}{\partial t} \ln \langle \Phi_0 | U_\epsilon(t, -\infty) | \Phi_0 \rangle \Big|_{t=0} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} i \frac{\partial}{\partial t} \langle \Phi_0 | U_\epsilon(t, -\infty) | \Phi_0 \rangle_L \Big|_{t=0} . \end{aligned}$$

Degeneraciones en los diagramas de Feynman

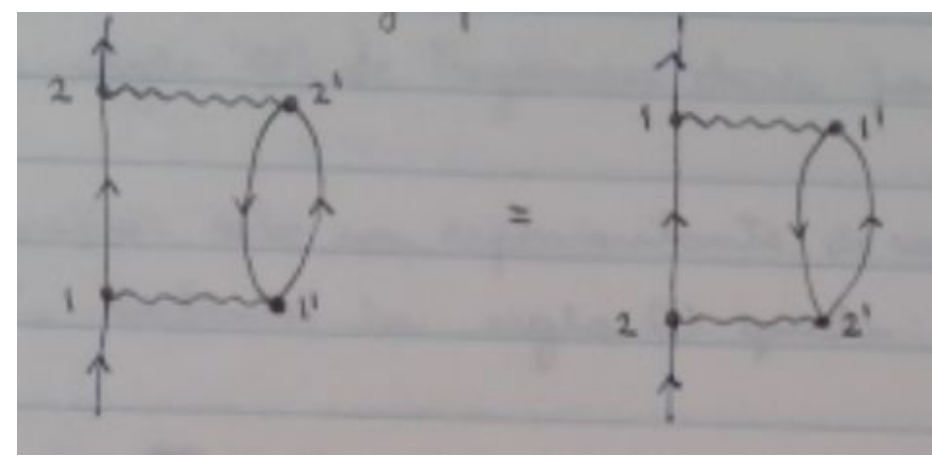
Dijimos:
$$iG(jt, kt') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dt_n e^{-\epsilon(|t_1| + \cdots + |t_n|)}$$
$$\langle \Phi_0 | \mathbb{T} \left[v(t_1) \cdots v(t_n) c_j(t) c_k^\dagger(t') \right] | \Phi_0 \rangle_{\text{conectados}}$$

En los diagramas conectados que quedan hay degeneraciones.

(1) Por el intercambio de líneas de interacción.

Hay $n!$ diagramas que valen lo mismo.

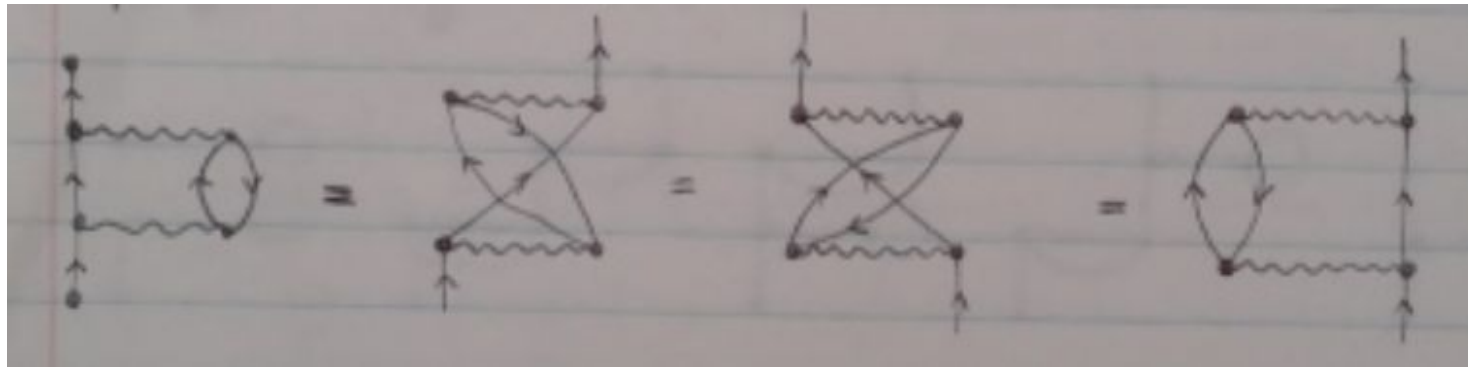
Por ejemplo:



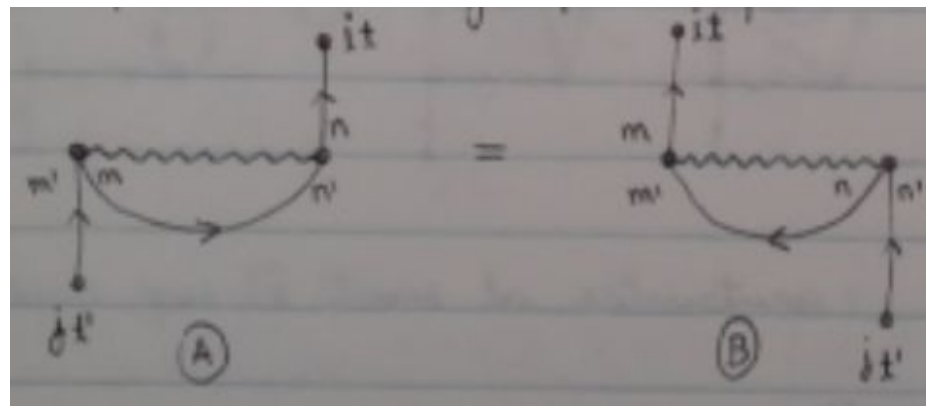
Degeneraciones en los diagramas de Feynman

(2) Degeneración topológica, al dar vuelta líneas de interacción.

Hay 2 posibilidades para cada línea de interacción, y como hay n líneas, hay 2^n diagramas equivalentes. Por ejemplo:

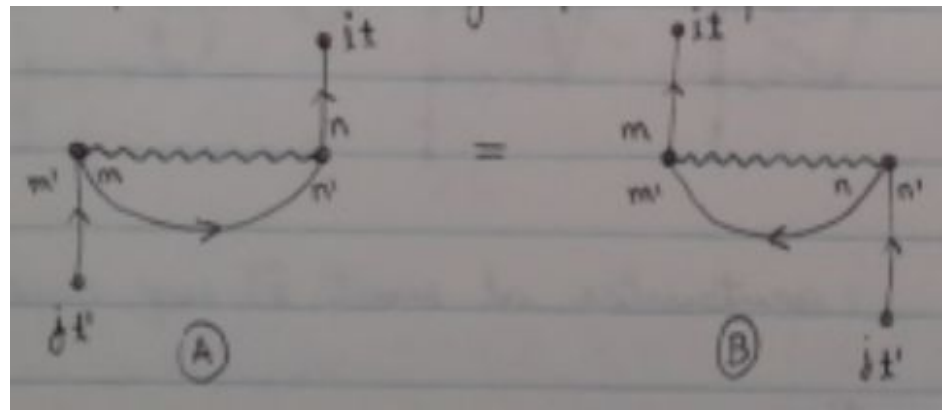


Se puede chequear en un ejemplo de primer orden:



Degeneraciones en los diagramas de Feynman

Se puede chequear en un ejemplo de primer orden:



$$(A) = (-1)^0 \frac{i^1}{2^1 1!} \sum_{mnm'n'} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \langle mn|v|m'n'\rangle G^0(it, nt_1) G^0(n't_1, mt_1^+) G^0(m't_1, jt')$$

$$(B) = (-1)^0 \frac{i^1}{2^1 1!} \sum_{mnm'n'} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \langle mn|v|m'n'\rangle G^0(it, mt_1) G^0(m't_1, nt_1^+) G^0(n't_1, jt')$$

Cambio variables: $m \longleftrightarrow n, \quad m' \longleftrightarrow n'$:

$$= (-1)^0 \frac{i^1}{2^1 1!} \sum_{nmn'm'} \int dt_1 e^{-\epsilon|t_1|} \langle nm|v|n'm'\rangle G^0(it, nt_1) G^0(n't_1, mt_1^+) G^0(m't_1, jt') = (A)$$

$$= \langle mn|v|m'n'\rangle$$

Degeneraciones en los diagramas de Feynman

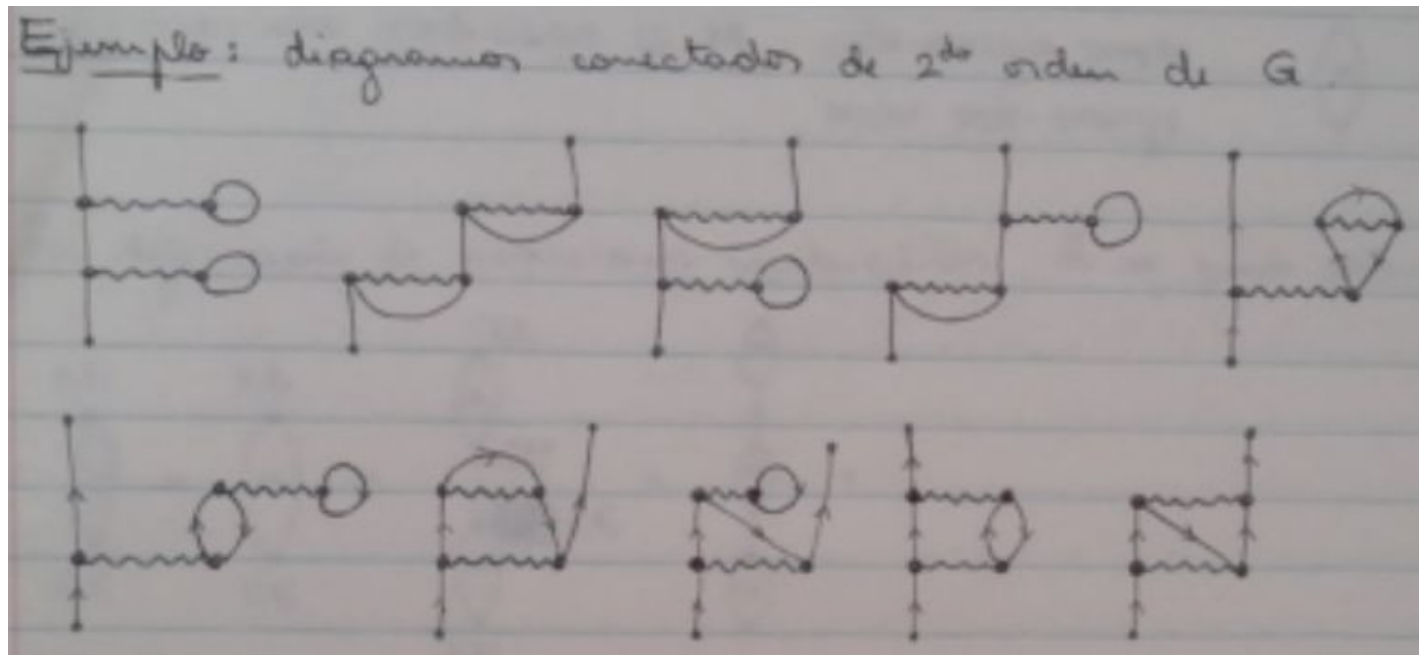
Entonces, hay familias de diagramas equivalentes con $n! 2^n$ miembros.

Representamos cada familia por uno de sus diagramas sin índices.

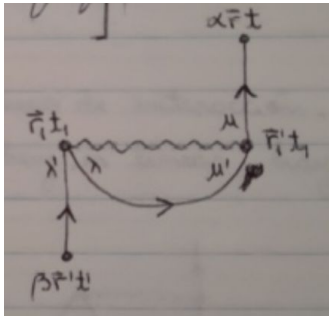
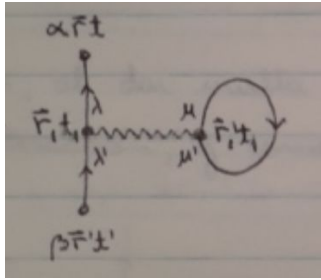
Antes, la regla (7) de Feynman decía poner un factor $i^n / n! 2^n$

Ahora consideramos sólo un representante de cada familia y multiplicamos por $n! 2^n$. Entonces la regla (7) queda:

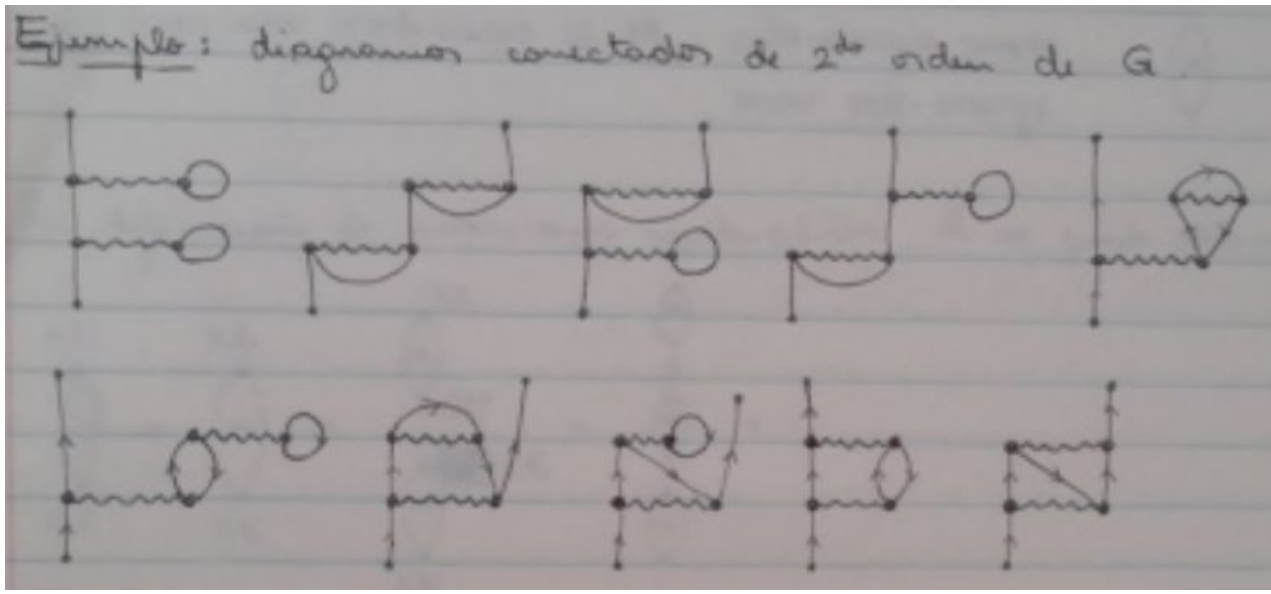
(7) El prefactor de los diagramas **no-indexados** y **conectados** de la función de Green es : i^n



Auto-energía



Primer orden



Segundo orden

Vemos que la función de Green tiene la estructura:

$$\begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \lambda t \\ \lambda' t' \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \lambda t \\ \lambda' t' \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \uparrow \\ \text{Hatched oval} \\ \downarrow \\ \bullet \end{array} \begin{array}{c} \lambda t \\ \lambda' t' \end{array}$$

Auto-energía $\tilde{M}(\lambda_1 t_1, \lambda'_1 t'_1)$
Self-energy

donde:

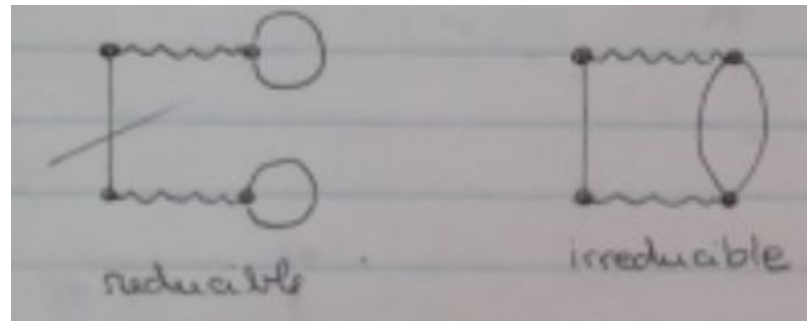
$$\text{Hatched oval} = \text{Wavy line with loop} + \text{Wavy line with loop} + \text{Feynman diagram with two wavy lines and a loop} + \text{Feynman diagram with two wavy lines and a loop} + \dots$$

Inserciones de la auto-energía

Los sumandos de la auto-energía $\tilde{M}(\lambda_1 t_1, \lambda'_1 t'_1)$ se llaman *inserciones* de la auto-energía.

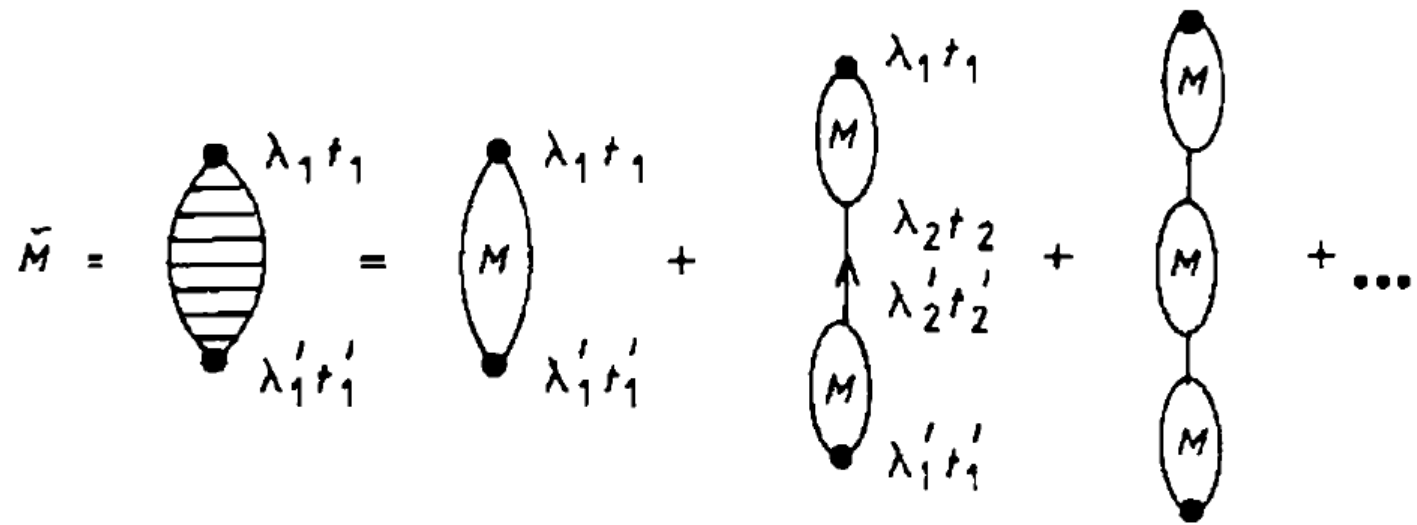
Las inserciones son diagramas conexos con una entrada y una salida vacantes, donde colocar líneas de G^0 .

Pueden ser { REDUCIBLES : se pueden partir cortando una línea de G^0
IRREDUCIBLES



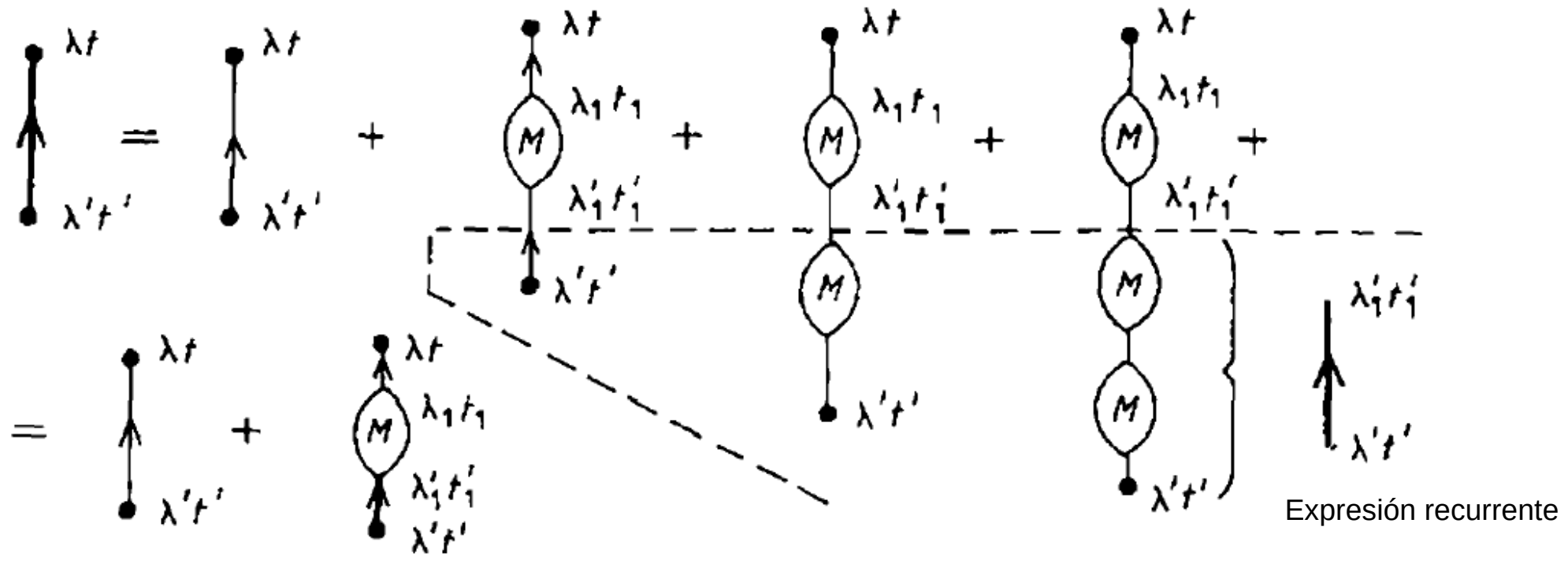
Auto-energía propia

$\sum(\text{inserciones irreducibles}) \equiv M$: Auto-energía propia



$$\begin{aligned} \tilde{M}(\lambda_1 t_1, \lambda'_1 t'_1) &= M(\lambda_1 t_1, \lambda'_1 t'_1) + \int dt_2 \int dt'_2 \sum_{\lambda_2 \lambda'_2} M(\lambda_1 t_1, \lambda_2, t_2) \\ &\quad \times G^{(0)}(\lambda_2 t_2, \lambda'_2 t'_2) M(\lambda'_2 t'_2, \lambda'_1 t'_1) + \dots \end{aligned}$$

Ecuación de Dyson



$$G(\lambda t \lambda' t') = G^{(0)}(\lambda t, \lambda' t') + \sum_{\lambda_1} \sum_{\lambda'_1} \int dt_1 \int dt'_1 G^{(0)}(\lambda t, \lambda_1 t_1) M(\lambda_1 t_1, \lambda'_1 t'_1) G(\lambda'_1 t'_1, \lambda' t')$$

ECUACIÓN DE DYSON

EXCELENTE !!

Ejercicios

(1) Escribir algunos diagramas y las fórmulas correspondientes a los diagramas conexos de primer y segundo orden de:

(a) Amplitud de vacío

(b) Función de Green

Cuáles son nulos en la representación de momento si hay invariancia traslacional?

(2) Dar las inserciones irreducibles de la auto-energía de primero y segundo orden (diagramas y fórmulas).

FIN de la clase 26

Resumen

- i) Diagramas conectados y desconectados
- ii) Degeneraciones
- iii) Auto-energía
- iv) Ecuación de Dyson para la función de Green

