

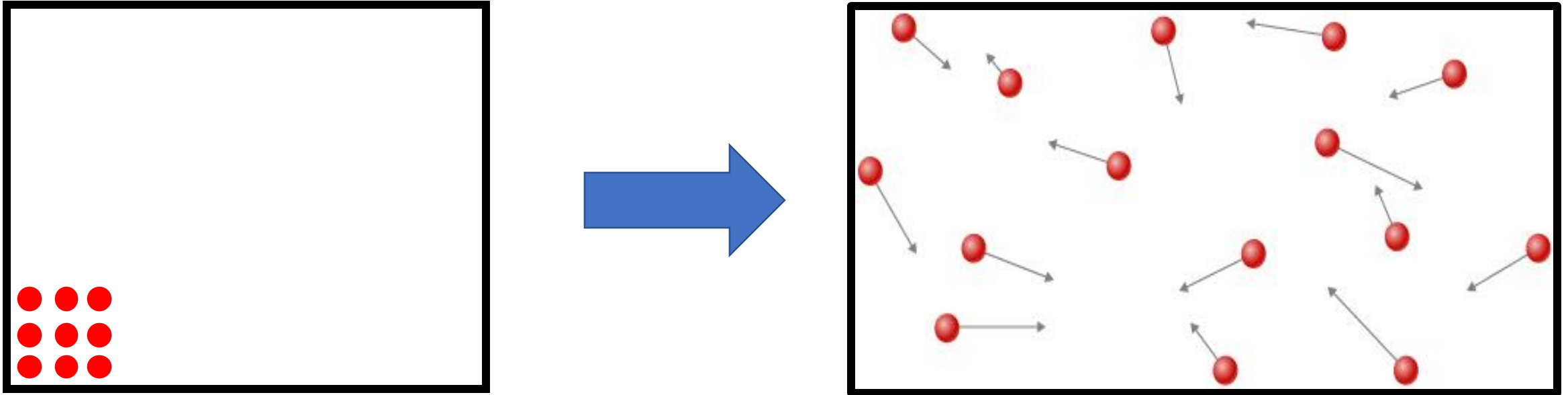
Breve Introducción a Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH)

Pablo Bergamasco

¿Qué vamos a ver?

- Caos clásico. Ergodicidad. Termalización en sistemas clásicos.
- Caos Cuántico.
 - ¿Cómo se manifiesta?
 - Random Matrix Theory (RMT)
 - Ejemplos de RMT
- Eigenstate Thermalization Hypothesis (ETH)
 - Experimentos numéricos

Termalización



Dado un estado inicial arbitrario, el sistema casi siempre evoluciona a una condición conocida como "Equilibrio Térmico" y permanece en esta condición a tiempos posteriores

El sistema pierde correlación con su estado en tiempos anteriores

Los observables de interés toman valores que solo dependen de la naturaleza del sistema y de su energía total pero no de otros detalles específicos del estado del sistema

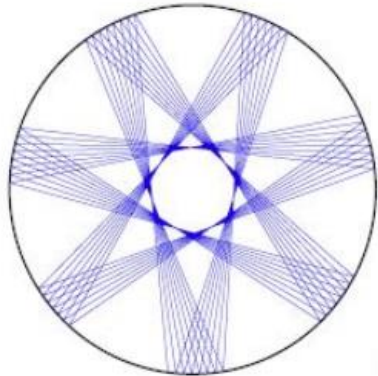
Termalización Clásica

Sistemas Integrables

N magnitudes conservadas

Trayectorias cerradas

No divergen las trayectorias. Se mantienen las correlaciones



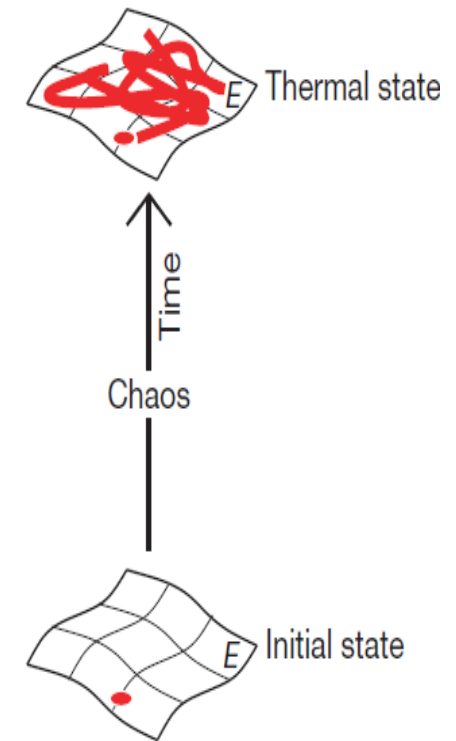
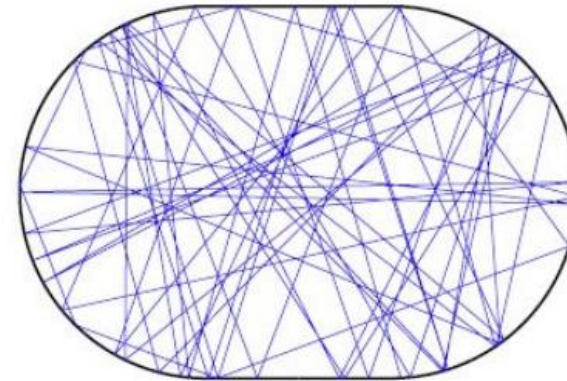
Sistemas Caóticos

Tengo menos cantidades conservadas que grados de libertad

Trayectorias de condiciones iniciales cercanas divergen exponencialmente

Trayectorias no correlacionadas

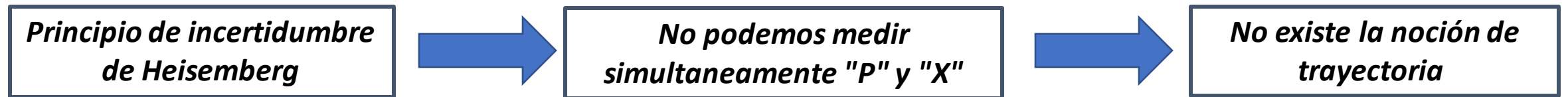
Las trayectorias se ven como aleatorias



¿Y en los sistemas cuánticos?

Hay constantes de movimiento extras. Toda función del Hamiltoniano conmuta con el Hamiltoniano

Ecuación de Schrodinger lineal . Estados "ceranos" permanecen "ceranos"



**Random Matrix Theory
(RMT)**

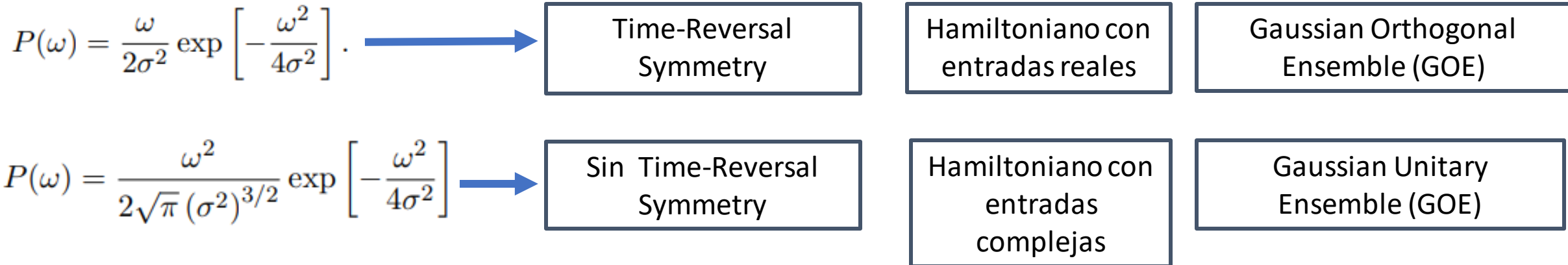
Random Matrix

Ideas desarrolladas por Wigner y Dyson para entender el espectro de núcleos atómicos complejos

La idea principal es que en lugar de tratar de predecir exactamente los niveles de energía y sus autofunciones, se centra en las propiedades estadísticas.

Un Hamiltoniano escrito en una base "mal sintonizada" se verá esencialmente como una matriz aleatoria

Predice la distribución de la separación de los niveles de energía (Distribución de Wigner–Dyson)



Los autovectores de una matriz aleatoria son vectores unitarios aleatorios

En los sistemas cuánticos la estadística de niveles juega el rol de indicador de si es caótico o no

Integrable

Caótico

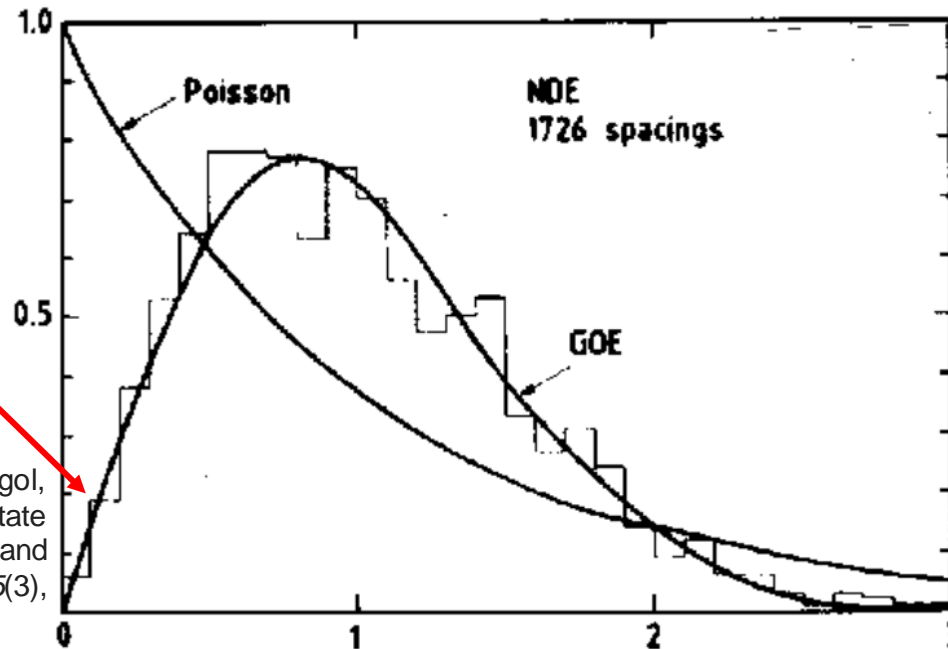
Distribución de Poisson

$$P_0(\omega) = \exp[-\omega],$$

Distribución de Wigner-Dyson

$$P(\omega) = \frac{\omega}{2\sigma^2} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}\right]. \quad P(\omega) = \frac{\omega^2}{2\sqrt{\pi}(\sigma^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\omega^2}{4\sigma^2}\right].$$

Level Repulsion

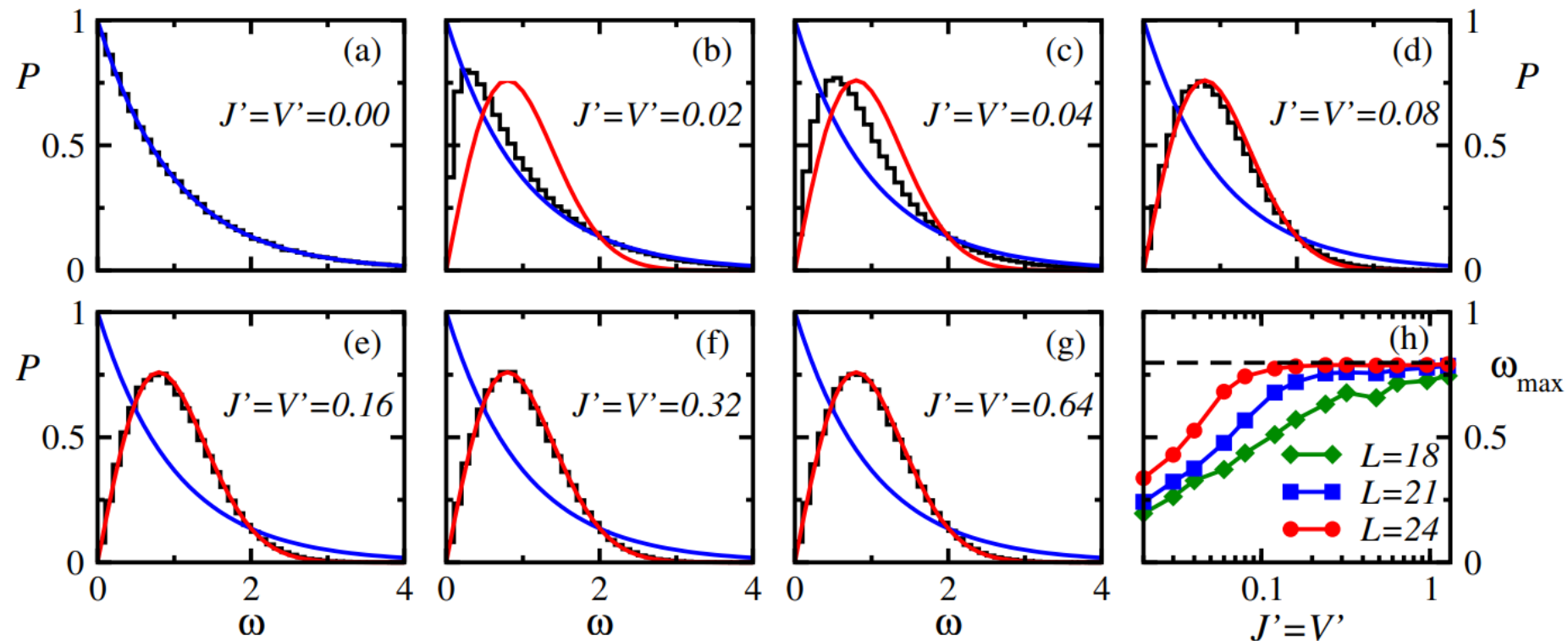


Distribución de la separación de niveles de núcleos atómicos. Las dos líneas representan la predicción de RMT en el ensamble GOE y la distribución de Poisson

Transición integrable a caótico

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^L \left[-J \left(\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_{j+1} + \text{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - J' \left(\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_{j+2} + \text{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

- Integrable cuando $J'=V'=0$
- Invarianza traslacional.
- Si no tenemos en cuenta ciertas simetrías podemos pensar que es integrable cuando no lo es



Transición integrable a caótico

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^L \left[-J \left(\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_{j+1} + \text{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - J' \left(\hat{f}_j^\dagger \hat{f}_{j+2} + \text{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

- Integrable cuando $J'=V'=0$
- Invarianza traslacional.
- Si no tenemos en cuenta ciertas simetrías podemos pensar que es integrable cuando no lo es

Medida de la deslocalización de los autovectores de H

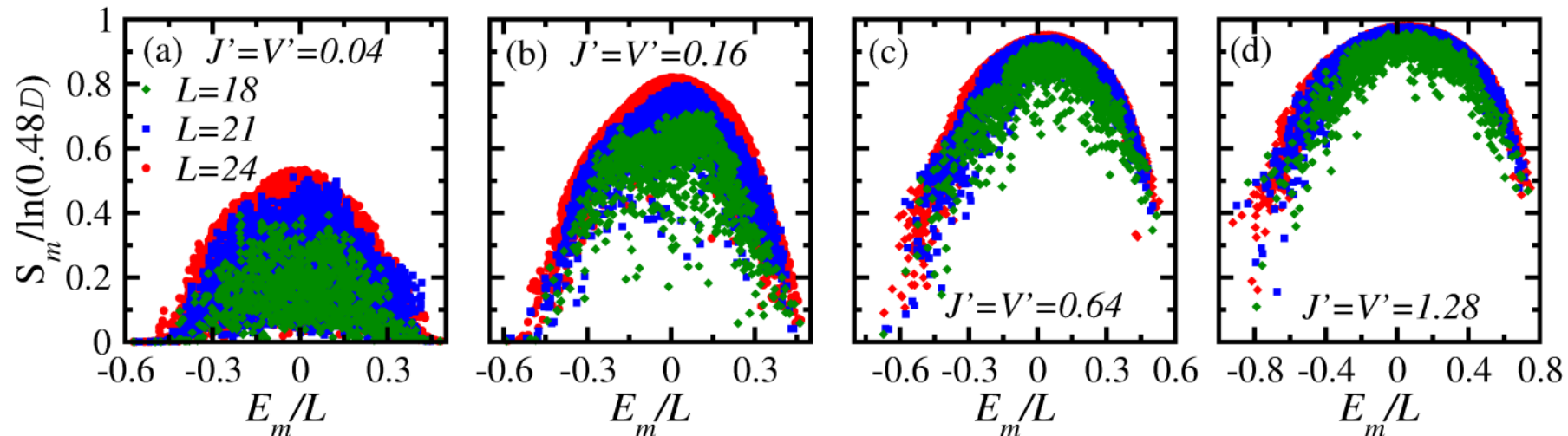
$$S_m \equiv - \sum_i |c_m^i|^2 \ln |c_m^i|^2$$

$$S_{\text{GOE}} = \ln(0.48D) + \mathcal{O}(1/D)$$

$$|m\rangle = \sum_i c_m^i |i\rangle$$

Autoestados del Hamiltoniano integrable

Autoestados del Hamiltoniano H



$$N = L / 3$$

$$J = V = 1$$

RMT: Elementos de Matriz de un operador

$$\hat{O} = \sum_i O_i |i\rangle \langle i|, \quad \text{where} \quad \hat{O}|i\rangle = O_i |i\rangle,$$

Base de un hamiltoniano random

$$O_{mn} \equiv \langle m | \hat{O} | n \rangle = \sum_i O_i \langle m | i \rangle \langle i | n \rangle = \sum_i O_i (\psi_i^m)^* \psi_i^n.$$

$$\overline{(\psi_i^m)^* (\psi_j^n)} = \frac{1}{\mathcal{D}} \delta_{mn} \delta_{ij}$$

Esencialmente los autoestados de una RM son vectores unitarios ortogonales

$$\overline{O_{mm}} = \frac{1}{\mathcal{D}} \sum_i O_i \equiv \bar{O},$$

Fluctuaciones de los elementos fuera de la diagonal

$$\overline{|O_{mn}|^2} - |\overline{O_{mn}}|^2 = \sum_i O_i^2 \overline{|\psi_i^m|^2 |\psi_i^n|^2} = \frac{1}{\mathcal{D}} \overline{O^2}.$$

$$O_{mn} \approx \bar{O} \delta_{mn} + \sqrt{\frac{\overline{O^2}}{\mathcal{D}}} R_{mn},$$

Variable aleatoria con valor medio cero y varianza uno

Termalización de sistemas aislados

Tomemos un sistema de muchos cuerpos $N \gg 1$

$$\hat{H}|m\rangle = E_m|m\rangle \quad \longrightarrow \quad |\psi(t)\rangle = \sum_m C_m e^{-iE_m t} |m\rangle \quad \text{con} \quad \begin{aligned} C_m &= \langle m|\psi_I\rangle \\ O_{mn} &= \langle m|\hat{O}|n\rangle \end{aligned}$$

Estamos interesados en los valores medios de observables

$$O(t) \equiv \langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \sum_{m,n} C_m^* C_n e^{i(E_m - E_n)t} O_{mn} = \underbrace{\sum_m |C_m|^2 O_{mm}}_{[O]_{th}} + \underbrace{\sum_{m,n \neq m} C_m^* C_n e^{i(E_m - E_n)t} O_{mn}}_{\text{fluctuaciones}}$$

Decimos que el observable O termaliza si:

1. Luego de un tiempo, el valor medio coincide con el ensamble microcanónico.
2. Las fluctuaciones temporales son pequeñas a tiempos posteriores.

Decimos que el sistema va a termalizar si:

$$|O(t) - [O]_{th}| < \epsilon \quad \longrightarrow$$

Entonces necesitamos que:

1. O_{mm} debe variar suavemente con m
2. O_{mn} sea "pequeño"

Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

ETH puede ser formulado como un ansatz para los elementos de matriz de OBSERVABLES en la base de autoestados de un Hamiltoniano

$$O_{mn} = O(\bar{E}) \delta_{mn} + e^{-S(\bar{E})/2} f_O(\bar{E}, \omega) R_{mn}$$

$\bar{E} \equiv (E_m + E_n)/2$
 $\omega \equiv E_n - E_m$

Funciones suaves en sus argumentos

Entropía termodinámica a la energía \bar{E}

Valor de espectación en el ensamble microcanónico con energía \bar{E}

Variable aleatoria con valor medio cero y varianza uno

$$R_{nm} = R_{mn}, \quad f_O(\bar{E}, -\omega) = f_O(\bar{E}, \omega) \quad \text{Elementos de matriz reales (GOE)}$$
$$R_{nm}^* = R_{mn}, \quad f_O^*(\bar{E}, -\omega) = f_O(\bar{E}, \omega) \quad \text{Elementos de matriz complejos (GUE)}$$

Diferencias entre RMT y ETH

1. Los elementos diagonales del observable no son iguales para todos los autoestados. Son funciones suaves de la energía.
2. ETH se reduce a RMT si uno se focaliza en una ventana angosta de energía donde $O(E)$ es constante.
3. Los elementos no diagonales poseen una función envolvente que depende de la energía media y la diferencia de energía entre los autoestados involucrados. ETH contempla la estructura de los elementos fuera de la diagonal

Experimentos Numéricos

Hard core bosons

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^L \left[-J \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} + \text{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - J' \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+2} + \text{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$

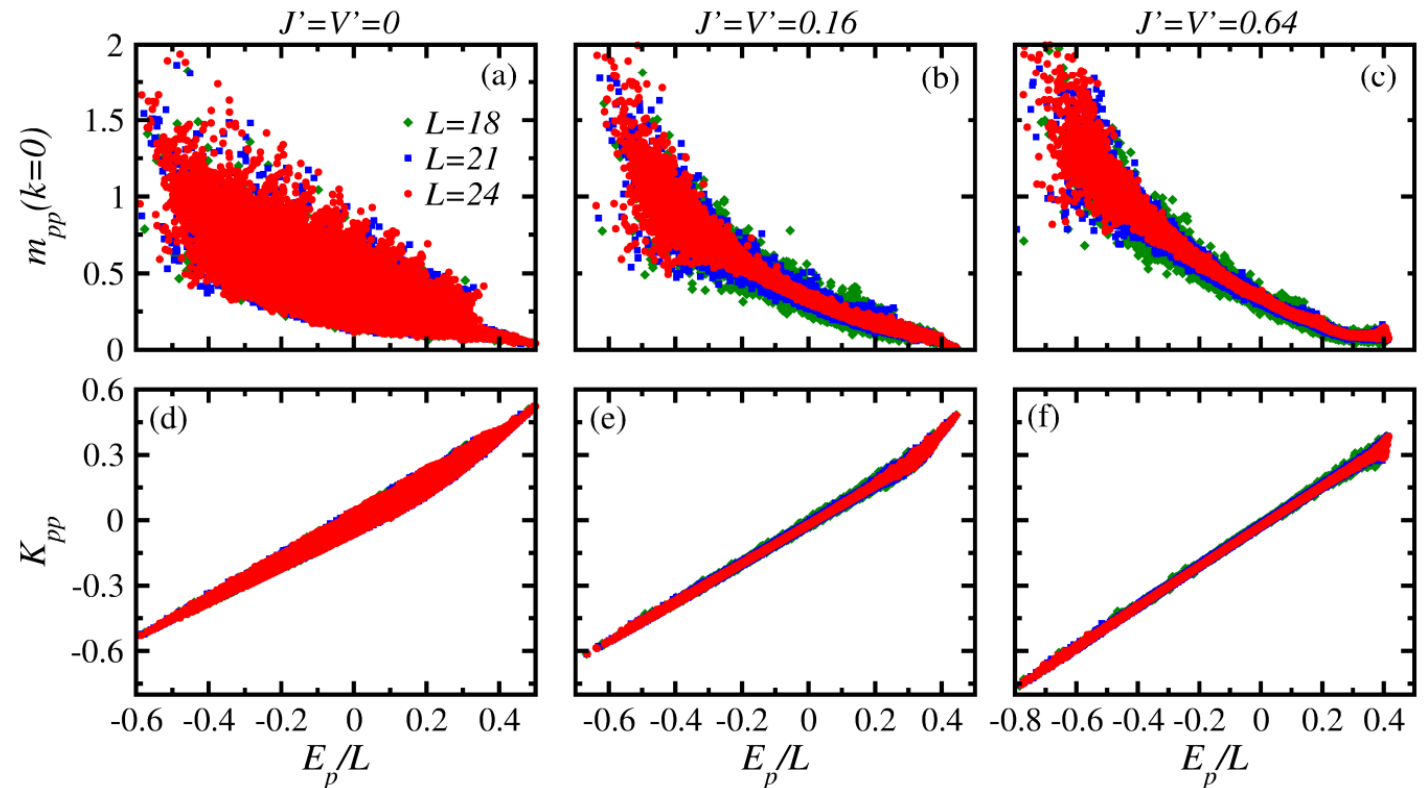
$$N = L/3 \\ J = V = 1$$

Elementos diagonales

$$\hat{m}(k) = \frac{1}{L} \sum_{i,j} e^{ik(i-j)} \hat{b}_i^\dagger \hat{b}_j$$

$$\hat{K} = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \left[-J \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} + \text{H.c.} \right) - J' \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+2} + \text{H.c.} \right) \right]$$

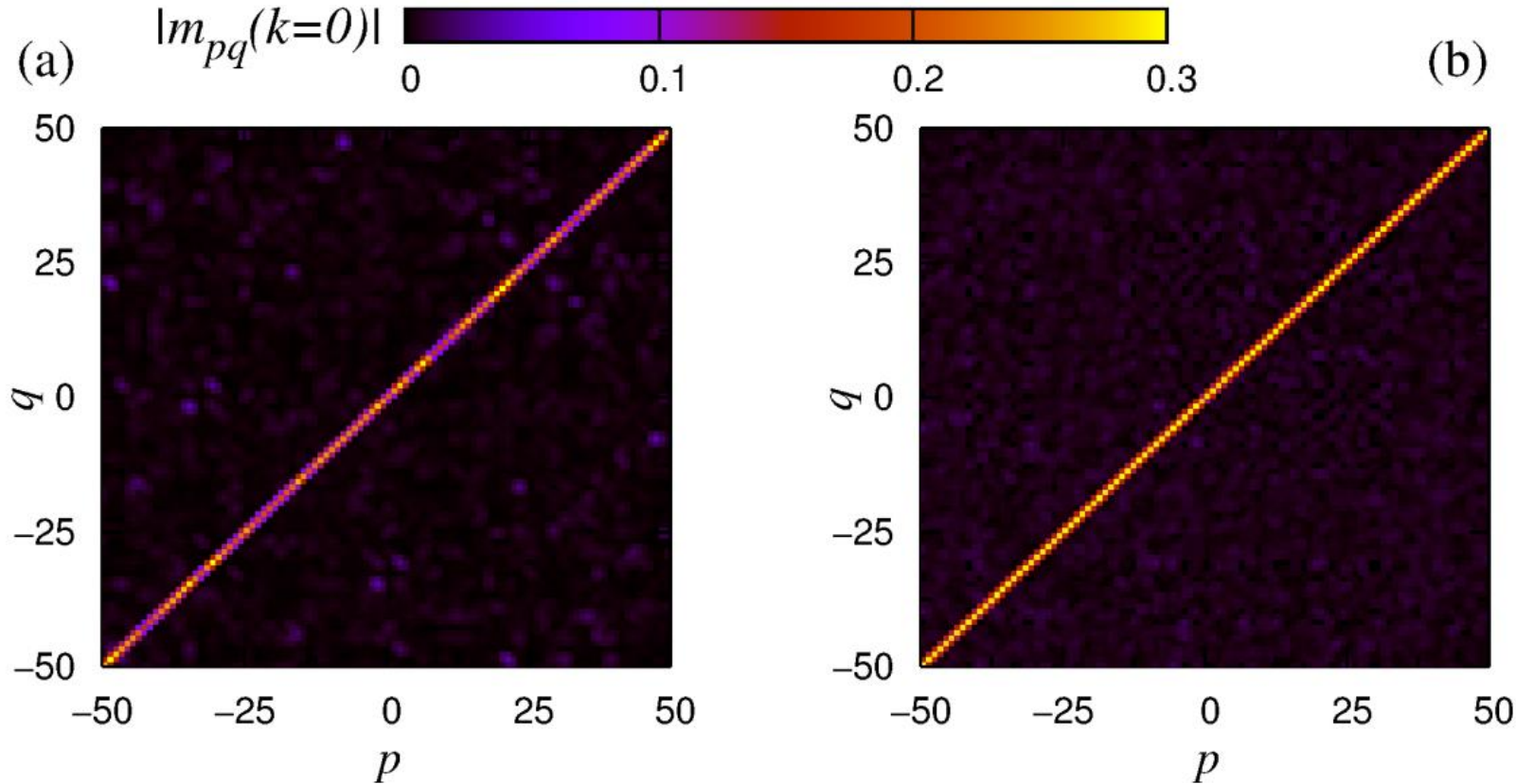
Energía cinética por sitio



Experimentos Numéricos

Elementos fuera de la diagonal $N = L/3$, $J = V = 1$, $L = 24$

$$\hat{H} = \sum_{j=1}^L \left[-J \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+1} + \text{H.c.} \right) + V \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+1} - \frac{1}{2} \right) \right. \\ \left. - J' \left(\hat{b}_j^\dagger \hat{b}_{j+2} + \text{H.c.} \right) + V' \left(\hat{n}_j - \frac{1}{2} \right) \left(\hat{n}_{j+2} - \frac{1}{2} \right) \right]$$



$J' = V' = 0$
Integrable

$J' = V' = 0.32$
No Integrable

En ambos los valores medios de los elementos fuera de la diagonal son menores a los de la diagonal

El caso No-integrable parecen tener una distribución más uniforme

Gracias

