

Física de muchos cuerpos/ Mecánica Cuántica de Muchas Partículas

DF-FCEN-UBA, Primer Cuatrimestre 2024

Guía 2: Operadores creación y destrucción

1. Demostrar las reglas de anticonmutación (conmutación) que satisfacen los operadores de creación y aniquilación de fermiones (bosones).
2. Demostrar que para operadores fermiónicos se satisface:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk} a_i^\dagger a_l - \delta_{il} a_k^\dagger a_j$$

Calcular el mismo conmutador para bosones.

3. Trabajar el conmutador:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l^\dagger a_m a_n]$$

para fermiones y bosones, hasta reducirlo a la suma de productos de cuatro operadores (ver un ejemplo de su uso en la Ec. (8.7) del libro de Haug y Koch).

4. Escribir algunos de los estados del ejercicio 1 del capítulo XIV de CT-D-L en las 3 notaciones usadas para designar estados de Fock (“number states”).
5. Ejercicio 1.4 del libro de Bruus y Flensberg: En algunos cristales, los electrones de valencia pueden estar ligados muy estrechamente a los iones del cristal. Un buen punto de partida para analizar dichos sistemas es describir la energía cinética a través de procesos de salto (“*hopping*”) con amplitud de probabilidad t que un electrón de valencia salte de un sitio j a otro sitio vecino $j + \delta$. El correspondiente Hamiltoniano, llamado *tight binding*, está dado por:

$$H = -t \sum_{j\delta} c_{j+\delta}^\dagger c_j$$

(a) Considere una red 1D con N sitios, condiciones periódicas de contorno, y una constante de red a . En tal caso, se tiene $j = 1, 2, \dots, N$ y $\delta = \pm 1$. Use la transformada de Fourier discreta

$$c_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k e^{ikja} c_k$$

para diagonalizar el Hamiltoniano en el espacio k y grafique los autovalores ε_k en función de k .

(b) En superconductores de alta temperatura, los electrones de conducción están confinados a planos paralelos de CuO, en los que los iones forman una red 2D cuadrada. En este caso se puede aplicar el modelo *tight binding* en 2D. Generalice el modelo 1D a una red cuadrada 2D con parámetro de red a y grafique contornos de energía constante ε_{k_x, k_y} en el plano $k_x k_y$.

6. El Hamiltoniano de un *modelo de Hubbard* para fermiones en una red unidimensional de L sitios se escribe,

$$\begin{aligned} \hat{H} &:= \hat{T} + \hat{U} + \hat{V} \\ \hat{T} &:= -t \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \left(c_{l,\sigma}^\dagger c_{l+1,\sigma} + \text{H.c.} \right) \\ \hat{U} &:= U \sum_{l=1}^L (\hat{n}_{l,\uparrow} \hat{n}_{l,\downarrow}) \\ \hat{V} &:= \sum_{l=1}^L (v_l^{\text{ext}} - \mu) \hat{n}_l \end{aligned}$$

donde $c_{l,\sigma}^\dagger$ crea y $c_{l,\sigma}$ destruye un fermión de espín $\sigma = \uparrow, \downarrow$ en el sitio l . \hat{T} es el operador cinético o de hopping que describe saltos entre sitios y \hat{U} describe una interacción local (sólo hay interacción entre partículas si están en el mismo sitio). El potencial \hat{V} describe la acción de un potencial local y μ es el potencial químico que fija el número de partículas.

- (a) Escribir las reglas de conmutación de los operadores $c_{l,\sigma}^\dagger$ y $c_{l,\sigma}$, el operador número de ocupación \hat{n}_l y el número total de partículas N en función de los operadores creación y aniquilación.
- (b) Considere N fermiones y una red de 2 sitios. Para el caso particular de $L = 2$, ¿qué dimensión tiene el espacio de Fock? Escriba todos los estados del espacio de Fock para todos los posibles N y la dimensión del espacio

de Hilbert para cada N . Por ejemplo, para $N = 4$ el espacio de Hilbert tiene dimensión 1, el único estado posible es $|\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\rangle$.

(c) Considere 2 fermiones y una red de 2 sitios.

i. Para el caso particular $L = N = 2$, escribir los 3 estados de la base singlete en términos de $c_{l,\sigma}^\dagger$ y $c_{l,\sigma}$. Escribir el valor esperado de los operadores número de ocupación de los sitios 1 y 2: $\langle \hat{n}_1 \rangle$ y $\langle \hat{n}_2 \rangle$ en cada uno de los estado de la base.

ii. Reescribir el potencial \hat{V} en función de $(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)$ y $(\hat{n}_1 + \hat{n}_2)$. Demostrar que al fijar $L = N = 2$ la única variable independiente es $\langle \hat{n}_1 - \hat{n}_2 \rangle$. De hecho, se puede interpretar $\langle \hat{n}_1 - \hat{n}_2 \rangle$ como el dipolo. ¿Cómo se escribiría un operador correspondiente a un campo oscilante en aproximación dipolar?

iii. Escribir un estado general $|\Psi\rangle$ y calcular $d(t) = \langle \hat{n}_1 - \hat{n}_2 \rangle (t)$.

iv. Argumentar bajo qué condiciones el sistema se comporta como un sistema efectivo de 2 niveles bajo la acción de un campo oscilante en aproximación dipolar. Hallar la frecuencia de Rabi.

(d) Escribir el Hamiltoniano ahora para bosones (modelo de Bose-Hubbard, se usa como modelo de gases alcalinos diluidos en redes ópticas).

i. ¿Qué dimensión tiene el espacio de Fock para $L = 2$?

ii. Para el caso de $L = N = 2$ escribir un estado $|\Psi\rangle$ general. Hallar los valores esperados de $\langle \hat{n}_1 \rangle$ y $\langle \hat{n}_2 \rangle$ en cada uno de los estado de la base.

iii. Escribir la energía del estado fundamental en ausencia de potencial externo y en el límite $t \rightarrow 0$.