Física de muchos cuerpos/ Mecánica Cuántica de Muchas Partículas

DF-FCEN-UBA, Primer Cuatrimestre 2024

Guía 5: Función de Green

1. Demostrar las expresiones:

$$\theta(\tau) = \lim_{\eta\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\eta} \tag{1}$$

$$\theta(-\tau) = \lim_{\eta\to 0^+} +\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega \, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - i\eta} \tag{2}$$

2. Hallar la función de Green retardada en el dominio tiempo, $G^R(\mathbf{k}, t-t')$, y en el dominio frecuencia, $G^R(\mathbf{k}, \omega)$, para el gas de electrones libres y no-interactuantes.

3. Hallar la función de Green ordenada temporalmente para el gas de electrones libres y no-interactuantes en el dominio espacio-tiempo, $G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')$.

4. Demostrar que para el gas de fermiones no interactuantes las funciones espectrales son:

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k - k_F)\delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)}) = (1 - \langle n_{\mathbf{k}}\rangle)\delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)})$$

$$B(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k_F - k)\delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)}) = \langle n_{\mathbf{k}}\rangle\delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)})$$

5. Problema 3.2 del Fetter-Walecka.
   Una de las más útiles relaciones de teoría cuántica de campos es:

$$e^{iS}\, O\, e^{-iS} = O + i[S, O] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, O]] + \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, O]]] + \cdots$$

   donde O y S son operadores. Verificar esa relación hasta el orden dado. La transformación de un operador de la representación de Schrödinger a la de Interacción está dada por :

$$O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}$$

donde

$$H_0 = \sum_k \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k$$

Aplique la relación de arriba para verificar que los operadores de creación y destrucción en la representación de Interacción están dados por

$$c_k(t)_I = c_k e^{-i\omega_k t}$$

$$c_k^\dagger(t)_I = c_k^\dagger e^{i\omega_k t}$$

6. El siguiente problema está basado en las secciones 2.3 y 2.4 del libro *'An Introduction To Quantum Field Theory'* de Peskin y Schroeder:
   El operador de campo para partículas sin espín puede escribirse como:

$$\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left(a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} + a_{\vec{k}}^\dagger e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right),$$

   donde los relaciones de conmutación son $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^\dagger] = (2\pi)^3\delta(\vec{k} - \vec{k}')$. Además, se puede demostrar que el Hamiltoniano libre es: $H_0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\omega_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^\dagger a_{\vec{k}}$

   (a) Encuentre la expresión para el operador de campo en el picture de Heisenberg (Ec. 2.43 del Peskin).

   (b) Usando las relaciones de conmutación dadas, encuentre la evolución de los operadores de creación y destrucción en el picture de Heisenberg (Ec. 2.46 del Peskin).

   (c) A partir de estas expresiones, escriba el operador de campo para cualquier punto $\vec{x}$ y cualquier tiempo t en función de los operadores a tiempo cero en el origen (ec. 2.49 del Peskin).

   (d) La amplitud de probabilidad de que una partícula se propague de $(\vec{y}, y^0)$ a $(\vec{x}, x^0)$ es $\langle 0|\phi(x)\phi(y)|0\rangle$. Llamaremos a esta cantidad $D(x-y)$. Verifique qué términos de los operadores de campo contribuyen en esta expresión. Verifique que se obtiene:

$$D(x-y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} e^{-ip\cdot(x-y)}$$

   Estudie el comportamiento de esta función para los casos en que $\vec{x} = \vec{y} \wedge x^0 - y^0 = t \to \infty$ y $x^0 = y^0 \wedge \vec{x} - \vec{y} = \vec{r} \to \infty$ (ecuaciones 2.51 y 2.52 del Peskin).

(e) Para estudiar la causalidad se define la función de Green de Feynman para el campo escalar como: $\langle 0| [\phi(x), \phi(y)] |0\rangle$, donde x e y son cuadrivectores. Verifique que cuando x e y están separados espacialmente, esta función de Green es nula.

(f) Evalúe $D(x-y)$ explícitamente en términos de las funciones de Bessel para el caso en que $x^0 = y^0 \wedge \vec{x} - \vec{y} = \vec{r}$.

7. Escribir la función de Green de un gas de Fermi no interactuante en función de la energía de excitacion que se necesita para agregar o quitar, a un sistema de N partículas, una partícula con momento K.