Física de muchos cuerpos/
Mecánica Cuántica de Muchas Partículas

DF-FCEN-UBA, Primer Cuatrimestre 2024

Guía 5: Función de Green

1. Demostrar las expresiones:

$$\theta(\tau) = \lim_{\eta\to 0^+} -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + i\eta} \tag{1}$$

$$\theta(-\tau) = \lim_{\eta\to 0^+} +\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega\, \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega - i\eta} \tag{2}$$

2. Hallar la función de Green retardada en el dominio tiempo, $G^R(\mathbf{k}, t - t')$, y en el dominio frecuencia, $G^R(\mathbf{k}, \omega)$, para el gas de electrones libres y no-interactuantes.

3. Hallar la función de Green ordenada temporalmente para el gas de electrones libres y no-interactuantes en el dominio espacio-tiempo, $G(\mathbf{r}t, \mathbf{r}'t')$.

4. Demostrar que para el gas de fermiones no interactuantes las funciones espectrales son:

$$A(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k - k_F)\delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)}) = (1 - \langle n_{\mathbf{k}}\rangle)\delta(\epsilon - w_{\mathbf{k}}^{(N+1)})$$

$$B(\mathbf{k}, \epsilon) = \theta(k_F - k)\delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)}) = \langle n_{\mathbf{k}}\rangle\delta(\epsilon - w_{-\mathbf{k}}^{(N-1)})$$

5. Problema 3.2 del Fetter-Walecka.
Una de las más útiles relaciones de teoría cuántica de campos es:

$$e^{iS}\, O\, e^{-iS} = O + i[S, O] + \frac{i^2}{2!}[S, [S, O]] + \frac{i^3}{3!}[S, [S, [S, O]]] + \cdots$$

donde O y S son operadores. Verificar esa relación hasta el orden dado. La transformación de un operador de la representación de Schrödinger a la de Interacción está dada por :

$$O_I(t) = e^{iH_0 t} O_S e^{-iH_0 t}$$

donde

$$H_0 = \sum_k \hbar\omega_k c_k^\dagger c_k$$

Aplique la relación de arriba para verificar que los operadores de creación y destrucción en la representación de Interacción están dados por

$$c_k(t)_I = c_k e^{-i\omega_k t}$$

$$c_k^\dagger(t)_I = c_k^\dagger e^{i\omega_k t}$$

6. Obtener una ecuación equivalente a la (15.14) del libro de GRH para el valor medio de un operador de una partícula, A, en función de $G(k,\omega)$ para un sistema con Hamiltoniano independiente del tiempo y con invariancia translacional. Aplicar la ecuación obtenida a los operadores energía cinética, densidad de partículas y densidad de spin.
Ayuda: ver ecuaciones (15.20) y (15.21).

7. Calcular la energía del estado fundamental de un gas bidimensional (2D) de electrones libres y no interactuantes usando la ecuación (15.21) de GRH.
Ayuda: tomar como modelo el cálculo de GRH para el gas 3D de electrones libres y no interactuantes, en páginas 169-171.

8. (a) Encontrar la representación espectral para la susceptibilidad de spin:

$$\chi_{ii}^{z\,Ret}(t,t') = -i\Theta(t-t') < [S_i^z(t), S_i^z(t')] >$$

donde S_i^z es la componente z del spin de una partícula en el sitio i de una red.

(b) Mostrar que $Im[\chi_{ii}^{z\,Ret}(\omega)]$ es una función antisimétrica de ω.

(c) Calcular $Im[\chi_{ii}^{z\,Ret}(\omega)]$ para el Hamiltoniano de Heisenberg de dos sitios para partículas de spin 1/2:

$$H = J\,\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

(d) Mostrar que:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\chi"(\omega) = \frac{1}{4}$$

para partículas de spin 1/2, siendo

$$\chi"(\omega) = -2\,\mathrm{Im}[\chi_{ii}^{z\,Ret}(\omega)]$$

9. La función de respuesta dieléctrica para un gas de electrones está definida:

$$\chi(\mathbf{q}, t-t') = -i\theta(t-t')\frac{1}{V}\langle[\rho(\mathbf{q}, t), \rho(-\mathbf{q}, t')]\rangle$$

donde $\rho(\mathbf{q}, t)$ es la densidad electrónica escrita en el espacio de momentos y V es el volumen del sistema.

Demostrar que la representación espectral de la función de respuesta para electrones no interactuantes es:

$$\chi(\mathbf{q}, \omega) = \frac{2}{V}\sum_{\mathbf{k}}\frac{n_F(\varepsilon_{\mathbf{k}}) - n_F(\varepsilon_{\mathbf{k+q}})}{\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k+q}} + \omega + i0^+}$$

donde $n_F(\varepsilon)$ es la distribución de Fermi.

Ayuda: Mostrar primero que el operador de densidad puede escribirse para el caso de electrones no interactuantes como:

$$\rho(\mathbf{q}, t) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} c^{\dagger}_{\mathbf{k}\sigma} c_{\mathbf{k+q}\,\sigma}\, e^{i(\varepsilon_{\mathbf{k}} - \varepsilon_{\mathbf{k+q}})\,t}$$