Problema 5

Problema 9 de la guía 5

En la representación de Schrödinger, el operador densidad está dado por $\rho(x) = \sum_\sigma \psi^\dagger_\sigma(x)\psi_\sigma(x)$. Reemplazando a los operadores de campo por su desarrollo en términos de los operadores $c_{k\sigma}$ y $c^\dagger_{k\sigma}$ resulta $\rho(q) = \sum_{k,\sigma} c^\dagger_{k\sigma} c_{k+q\sigma}$. Los operadores en la representación de Heinsenberg se expresan como

$$\begin{aligned} c_{k\sigma}(t) &= e^{iHt} c_{k\sigma} e^{-iHt}, \qquad (26)\\ c^\dagger_{k\sigma}(t) &= e^{iHt} c^\dagger_{k\sigma} e^{-iHt}. \qquad (27)\end{aligned}$$

Estas relaciones implican, a su vez, que

$$\frac{dc_{k\sigma}(t)}{dt} = i[H, c_{k\sigma}(t)], \qquad (28)$$

y lo mismo para $c^\dagger(t)$. Para partículas no interactuantes $[H, c_{k\sigma}(t)] = -\epsilon_k c_{k\sigma}(t)$ y $[H, c^\dagger_{k\sigma}(t)] = \epsilon_k c^\dagger_{k\sigma}(t)$. Luego,

$$\begin{aligned} c_{k\sigma}(t) &= e^{-i\epsilon_k t} c_{k\sigma}, \qquad (29)\\ c^\dagger_{k\sigma}(t) &= e^{i\epsilon_k t} c^\dagger_{k\sigma}, \qquad (30)\end{aligned}$$

no sorprendentemente igual que en la representación de interacción. Entonces resulta

$$\rho(q,t) = \sum_{k,\sigma} e^{i(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})t}\; c^\dagger_{k\sigma} c_{k+q\sigma}. \qquad (31)$$

Un cálculo simple muestra que el conmutador $[\rho(q,t), \rho(-q,t')]$ está dado por

$$[\rho(q,t), \rho(-q,t')] = \sum_{k,\sigma} \left[c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} - c^\dagger_{k+q\sigma} c_{k+q\sigma} \right]\; e^{i(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})(t-t')}. \qquad (32)$$

Teniendo en cuenta que

$$\sum_\sigma \frac{\left\langle 0 \,|\, c^\dagger_{k\sigma} c_{k\sigma} \,|\, 0 \right\rangle}{\langle 0|0\rangle} = 2\theta(k_F - k) \equiv 2n_F(k), \qquad (33)$$

resulta (con $\tau \equiv t - t'$)

$$-i\frac{\theta(\tau)}{V}\; \langle [\rho(q,t), \rho(-q,t')] \rangle = -\frac{2i\theta(\tau)}{V} \sum_k [n_F(k) - n_F(k+q)]\; e^{i(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})\tau}. \qquad (34)$$

Reemplazando θ por su desarrollo de Fourier y haciendo el consabido cambio de variable en la integral, se obtiene

$$-i\frac{\theta(\tau)}{V}\; \langle [\rho(q,t), \rho(-q,t')] \rangle = \frac{1}{2\pi V} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \sum_k \frac{e^{-i\omega\tau}}{\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q} + i\eta} \times 2\,[n_F(k) - n_F(k+q)]. \qquad (35)$$

Finalmente,

$$\chi(q,\omega) = \frac{2}{V} \sum_k \frac{n_F(k) - n_F(k+q)}{\omega + \epsilon_k - \epsilon_{k+q} + i\eta}. \qquad (36)$$