Temas avanzados de fluidos
Guía 2

Problema 1

Considere un fluido incompresible con densidad uniforme ρ_0, en un sistema rotante con velocidad angular $\vec{\Omega}$, que satisface la ecuación

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p - 2\vec{\Omega}\times\vec{v} + \nu\nabla^2\vec{v} \quad .$$

a) Muestre que para condiciones de contorno periódicas, la helicidad

$$H = \int \vec{v}.\vec{\omega}dV \quad ,$$

satisface una ecuación de balance y se conserva cuando $\nu = 0$.
b) Muestre que la tasa de disipación de helicidad en el caso viscoso está controlada por la super–helicidad

$$S = \int \vec{\omega}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{\omega}\right)dV \quad .$$

c) La helicidad es una medida de si el flujo tiene o no simetría de reflexión. ¿Qué ocurre con el signo de H frente a reflexiones?

Problema 2

Considere ahora un fluido incompresible con densidad media ρ_0, estratificado, bajo la aproximación de Boussinesq y con la frecuencia de Brunt–Väisälä N uniforme. El fluido satisface las ecuaciones

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}p - N\theta\check{\boldsymbol{z}} + \nu\nabla^2\vec{v} \quad ,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\theta = Nw + \kappa\nabla^2\theta \quad ,$$

donde w es la componente en $\check{\boldsymbol{z}}$ de la velocidad.
a) Muestre que la energía cinética $E_c = \frac{\rho_0}{2}\int v^2 dV$ no se conserva en el caso ideal ($\nu = \kappa = 0$). Puede asumir condiciones de contorno periódicas u otras condiciones convenientes.
b) Obtenga una ecuación de balance para la energía total (cinética y potencial)

$$E = \frac{\rho_0}{2}\int v^2 dV + \frac{1}{2}\int \theta^2 dV \quad .$$

c) ¿Qué cantidades controlan la tasa de disipación total? ¿Físicamente a qué corresponden?

Problema 3

Resuelva numéricamente la ecuación para un flujo rotante incompresible con densidad uniforme $\rho_0 = 1$ (en unidades adimensionales)

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\vec{\nabla}\right)\vec{v} = -\vec{\nabla}p - 2\Omega\hat{\boldsymbol{z}} \times \vec{v} + \nu\nabla^2\vec{v} \quad ,$$

en un recinto cúbico periódico con longitud 2π ($\nu = 3\,.\,10{-}3$, en unidades adimensionales). Para esto puede utilizar los códigos provistos en "Material adicional" en la página de la materia (el solver `ROTH` en `GHOST` resuelve estas ecuaciones).

a) Utilice condiciones iniciales para la velocidad con una perturbación aleatoria con ($\vec{\nabla}.\vec{v} = 0$) concentrada en una banda horizontal con altura $2\pi/3$ en el centro de la caja, y $\vec{v} = 0$ en el resto del recinto. Construya la perturbación inicial para que tenga número de onda $k = 10$ y energía cinética $E =< v^2 >= 1$ (donde los corchetes indican el valor medio espacial). La resolución espacial de todas las simulaciones será $N_x = N_y = N_z = 128$. Estime en base a estos datos qué paso temporal debería utilizar según la condición CFL. Estime también el número de Rossby para la condición inicial.

b) Para $\Omega = 10$, integre el sistema hasta $t = 1$, guardando la velocidad y la vorticidad cada $\Delta t = 0.05$. Visualice la densidad de helicidad

$$h(\vec{x}) = \vec{v}(\vec{x}).\vec{\omega}(\vec{x})$$

en un corte bidimensional en el plano $X - Z$ ¿Qué ocurre a medida que el sistema evoluciona?

c) Estime a qué velocidad media se propagan los paquetes con $h > 0$ y con $h < 0$. ¿Qué velocidad espera obtener? Compare con una simulación con $\Omega = 0$.

d) Realice simulaciones variando Ω entre 0 y 20. Grafique la velocidad media de propagación de los paquetes en función de Ω.

e) Para este conjunto de simulaciones, calcule $\left\langle\left|\frac{\partial u}{\partial z}\right|\right\rangle$ en función del tiempo (puede utilizar diferencias finitas para estimar la derivada espacial). ¿Qué ocurre al aumentar Ω?

Problema 4

Resuelva numéricamente las ecuaciones de Boussinesq con $\rho_0 = 1$, $\kappa = \nu = 3\,.\,10^{-3}$, en un recinto cúbico periódico con tamaño $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$, y con resolución espacial $N_x = N_y = 128$, $N_z = 64$ (solver `BOUSS` en `GHOST`). Imponga un viento horizontal $\vec{v} = U\hat{\boldsymbol{x}}$ uniforme ($U = 1$), y perturbe este viento con una fuerza $\vec{f} = f_0\hat{\boldsymbol{z}}$ confinada en una banda vertical con $x \in [0, \pi/10]$, como se esquematiza en la figura. Este es un modelo sencillo para estudiar ondas de sotavento.

a) Para $f_0 = 0.1$, integre el sistema hasta $t = 5$ con frecuencia de Brunt–Väisälä $N = 10$. Verifique que se genera una onda estacionaria (ayuda: puede guardar los campos cada $\Delta t = 0.5$, y observar cortes de la temperatura en le plano $X - Z$).

b) Estudie la longitud de onda de la onda estacionaria en función de N, variando N entre 1 y 15.