Temas avanzados de fluidos
Guía 3

Problema 1

Para estudiar inestabilidades en flujos estratificados con cizalla, resuelva numéricamente las ecuaciones de Boussinesq en un recinto con tamaño $4\pi \times 2\pi \times 2\pi$, usando una grilla con $256 \times 16 \times 128$ puntos. Utilice como condición inicial el siguiente perfil para la velocidad horizontal

$$u = u_0 \left\{ \tanh[\gamma(z - \pi/2)] + tanh[\gamma(-z + 3\pi/2)] - 1 \right\}, \tag{1}$$

donde γ controla la pendiente de la tangente hiperbólica (y por lo tanto el gradiente de la velocidad), y perturbe este perfil con un campo de velocidad aleatorio con amplitud u_1.

a) Grafique el perfil de la velocidad $u(z)$, y calcule analíticamente el máximo número de Richardson en función de la frecuencia de Brunt-Väisäla N y de γ.

b) Calcule la resolución espacial Δx, Δy y Δz. ¿Cómo puede justificar la elección de Δy que resulta de los parámetros dados más arriba? Para $u_0 = 1$ estime Δt usando la condición CFL, asumiendo que u_1 puede despreciarse frente a u_0.

c) Realice una simulación con $u_0 = 1$, $u_1 = 0.1$, $\nu = \kappa = 2 \times 10^{-3}$, $N = 2$ y $\gamma = 10$ hasta alcanzar $t = 10$. Guarde los campos de velocidad y temperatura con $\Delta t \leq 0.6$. Estudie la evolución temporal de u, ω_y y de la temperatura θ. ¿Qué observa?

d) Con los mismos parámetros que en el punto **(c)**, realice ahora simulaciones variando N entre 0 y 6. ¿Qué ocurre? Estime la tasa de crecimiento de la inestabilidad en función del máximo número de Richardson en el flujo.

e) Con los parámetros del punto **(c)**, fije ahora $N = 2$ y varíe γ entre 5 y 20. Grafique el número de onda del modo más inestable en función de γ (Ayuda: puede estimar este número de onda contando cuantos máximos de la vorticidad ω_y aparecen a lo largo de un corte horizontal a medida que se desarrolla la inestabilidad).

Problema 2

Considere el sistema de ecuaciones de Lorenz (Lorenz 63):

$$\dot{X} = \sigma(Y - X), \tag{2}$$

$$\dot{Y} = -XZ + rX - Y, \tag{3}$$

$$\dot{Z} = XY - bZ. \tag{4}$$

a) Usando la condición inicial $W_0 = (X_0, Y_0, Z_0) = (0, 0.5, 0.5)$, y parámetros $b = 8/3$, $\sigma = 10$, y $r = 2$, resuelva numéricamente este sistema hasta $t = 50$. Utilice un método con paso de tiempo variable (ode45" en Matlab, o "scipy.integrate.ode(f).set_integrator ('dopri5')" en SciPy). Grafique Y y Z en función del tiempo, y también la trayectoria en el espacio de fase proyectada en el plano $Y - Z$ (es decir, Y en función de Z). ¿A qué dinámica corresponde esta solución?

b) Con los mismos parámetros y condición inicial, tome $r = 10$ y luego $r = 24$. Grafique Y y Z en función del tiempo, Y en función de Z, y la trayectoria en el espacio de fases tridimensional (X, Y, Z). ¿Cómo cambian las soluciones?

c) Tome $r = 25$ y grafique nuevamente Y y Z en función del tiempo, Y en función de Z, y la trayectoria en el espacio de fases tridimensional. Compare las soluciones numéricas con $r = 24$ y con $r = 25$. ¿Cree que la solución con $r = 24$ va a continuar igual para todo tiempo? ¿Por qué?

d) Use $r = 30$ y muestre en un mismo gráfico la evolución temporal de Y para dos condiciones iniciales. Para esto considere la condición inicial anterior $W_0 = (0, 0.5, 0.5)$, y otra condición inicial dada por $W_0 = (0, 0.5, 0.50001)$. ¿Qué observa?

e) (Opcional) Resuelva las ecuaciones de Lorenz con un método de Runge–Kutta de orden 4 con paso fijo (para escribir el método puede usar https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods). Integre las ecuaciones con los mismos parámetros del punto **(d)** usando la condición inicial $W_0 = (0, 0.5, 0.5)$, con el método de Runge–Kutta de orden 4 con paso fijo con $\Delta t = 0.005$, y con el método de Matlab o SciPy con paso de tiempo variable que usó en los puntos anteriores. Compare las dos soluciones. Grafique la diferencia absoluta entre las dos soluciones en función del tiempo. ¿Qué ocurre?