Temas avanzados de fluidos
Guía 4

Problema 1

Dos elementos de fluido en un flujo turbulento isótropo y homogéneo están inicialmente a una distancia λ_1, donde λ_1 es una escala del rango inercial. A partir de análisis dimensional muestre que esta distancia crece como

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \sim (\epsilon\lambda)^{1/3} \quad , \tag{1}$$

donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de tiempo. Deduzca entonces que el tiempo requerido para que la distancia entre los dos elementos de fluido sea λ_2 (con $\lambda_2 \gg \lambda_1$) es $\tau \sim (\lambda_2^2/\epsilon)^{1/3}$ (o, equivalentemente, que la distancia cuadrática que separa las partículas crece como el tiempo al cubo; esta ley es conocida como la *Ley de Richardson* para la difusión turbulenta de pares de partículas).

Problema 2

A partir de análisis dimensional, muestre que para un flujo turbulento isótropo y homogéneo en ausencia de fuerzas externas el balance de energía en el rango inercial se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \sim -\epsilon \quad . \tag{2}$$

Asumiendo que la energía decae en forma auto–semejante, $E(t) \sim E_0 t^{-\alpha}$, y que el fluido está contenido en un recipiente con longitud característica L, muestre que $\alpha = 2$.

Problema 3

Considere una magnitud escalar θ que es advectada y difundida en forma pasiva por un flujo incompresible turbulento isótropo y homogéneo con densidad uniforme ρ_0. Las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son la ecuación de Navier-Stokes para el campo de velocidad $\mathbf{v}$, y la ecuación de advección para la concentración del escalar pasivo θ,

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla p' + \nu\nabla^2\mathbf{v}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\theta = \kappa\nabla^2\theta, \tag{4}$$

donde $p' = p/\rho_0$ y κ es la difusividad del escalar pasivo.

a) Asumiendo condiciones de contorno periódicas, obtenga una ecuación de balance para la varianza del escalar pasivo

$$\Theta = \frac{1}{2}\left\langle \theta^2 \right\rangle = \frac{1}{2V}\int \theta^2 \mathrm{d}V \quad , \tag{5}$$

y muestre que Θ es una magnitud conservada cuando $\kappa = 0$.

b) Utilizando análisis dimensional, muestre que en el rango inercial el flujo de la varianza del escalar pasivo, $\epsilon_\theta \sim \mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t$, satisface la siguiente relación

$$\epsilon_\theta \sim \frac{\delta\theta_\ell^2 \delta v_\ell}{\ell} \quad , \tag{6}$$

donde ℓ es un incremento en el rango inercial. Esta relación, equivalente a la ley de los 4/5 de Kolmogorov para el campo de velocidad, puede obtenerse formalmente y en ese caso es conocida como la *Ley de Yaglom* para el escalar pasivo. Interprete este resultado en términos de una cascada turbulenta de alguna magnitud física.

c) Utilizando esta relación, y asumiendo que el espectro de la energía cinética es el de Kolmogorov, $E(k) = C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3}$, obtenga la predicción de Kolmogorov–Obukhov–Corrsin para el espectro de la varianza del escalar pasivo, $E_\theta(k) = C_\theta \epsilon^{-1/3} \epsilon_\theta k^{-5/3}$.

Problema 4

Integre, desde $t = 0$ hasta $t = 20$, la ecuación de Navier-Stokes en tres dimensiones (solver HD en el código GHOST) con condiciones iniciales de Taylor–Green en $k = 1$ ($kdn = kup = 1$ en "parameter.inp"), con velocidad inicial r.m.s. $u_0 = 1$, con viscosidad cinemática $\nu = 3.5 \times 10^{-3}$, y en ausencia de fuerzas externas. Utilice 128^3 puntos de resolución espacial en un dominio cúbico con tamaño $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Guarde espectros de la velocidad cada $\Delta t \approx 0.7$, y el campo de velocidad cada $\Delta t \approx 1.4$.

a) Utilizando la resolución espacial, el valor de u_0 y la condición CFL, elija el paso temporal dt.

b) Grafique la enstrofía en función del tiempo (Ayuda: el código guarda el valor de $\langle v^2 \rangle$ y de $\langle \omega^2 \rangle$ en la segunda y tercera columna del archivo "balance.txt"). Estime la tasa máxima de disipación de energía por unidad de tiempo ϵ, y con ese valor estime el número de onda de Kolmogorov k_η. ¿Cómo compara este número de onda con el máximo número de onda resuelto por la simulación?

c) Durante el máximo de enstrofía, grafique el espectro de energía en escala log–log. El código guarda estos espectros en los archivos "kspectrum.*.txt" (Ayuda: puede promediar varios espectros en el tiempo para reducir las fluctuaciones). Identifique los números de onda relevantes, y grafique como referencia una ley de potencias de

Kolmogorov. ¿Obtiene el resultado esperado?

d) En los archivos "ktransfer.*.tx", el código guarda la función de transferencia $T(k)$. Utilice estos archivos para calcular el flujo de energía $\Pi(K) = -\sum_{k=0}^{K} T(k)$ durante el máximo de enstrofía. ¿Qué signo tiene el flujo? Grafique $\Pi(K)$ en escala lin–log e interprete.

e) Grafique el decaimiento de la energía cinética $E(t)$ en escala log-log. ¿Qué espera obtener? Compare los resultados con los obtenidos en el problema 2.

f) Utilizando la componente x del campo de velocidad en un instante cercano al máximo de enstrofía, calcule la función de estructura de segundo orden

$$S_2(r) = \left\langle [v_x(\mathbf{x} + r\hat{x}) - v_x(\mathbf{x})]^2 \right\rangle, \tag{7}$$

donde el valor medio es espacial sobre la coordenada $\mathbf{x}$ (es decir, sobre todos los puntos del recinto). Grafique $S_2(r)$ en escala log–log. ¿Obtiene el resultado esperado? ¿Por qué?