Temas avanzados de fluidos
Guía 5

Problema 1

Integre, desde $t = 0$ hasta $t = 25$, la ecuación de Navier-Stokes en tres dimensiones en un sistema de referencia rotante (solver ROTH en el código GHOST) con condiciones iniciales nulas para el campo de velocidad ($u_0 = 0$), y forzado mecánico aleatorio con amplitud $f_0 = 0.75$ centrado en los modos Fourier con $k = 1$ ($kdn = kup = 1$ en "parameter.inp"). En el forzado mecánico, actualice las fases al azar (con la opción "rand = 2" en el archivo de entrada) con un tiempo de correlación "cort=0.5" (de esta forma, las fases de los modos Fourier en el forzado cambiarán cada $\Delta t = 0.5$). Utilice frecuencia de rotación $\Omega_z = 8$, viscosidad cinemática $\nu = 2 \times 10^{-3}$, y $192 \times 192 \times 48$ puntos de resolución espacial en un dominio cúbico con tamaño $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Guarde espectros de la velocidad cada $\Delta t \approx 0.5$, y el campo de velocidad cada $\Delta t \approx 1.5$.

a) Utilizando la resolución espacial y la condición CFL, y asumiendo que en el estado turbulento la velocidad característica será $U \approx 1$, elija el paso temporal dt que utilizará para la integración numérica.

b) Grafique la energía, la enstrofía y la tasa de inyección de energía en función del tiempo. (Ayuda: el código guarda el valor de $\langle v^2 \rangle$, de $\langle \omega^2 \rangle$, y de ϵ respectivamente en la segunda, tercera y cuarta columnas del archivo "balance.txt"). Verifique numéricamente la relación

$$\frac{dE}{dt} = \epsilon - 2\nu Z \tag{1}$$

(donde Z es la enstrofía). Interprete.

c) Identifique el tiempo aproximado en el que el sistema llega al régimen turbulento t_*. Grafique el espectro de energía isótropo $E(k)$, el espectro de energía perpendicular $E(k_\perp)$, y el espectro de energía paralelo $E(k_\parallel)$, promediados en el tiempo desde t_* hasta $t = 25$ (Ayuda: el código guarda el espectro perpendicular en los archivos "kspecperp.*.txt", y el espectro paralelo en "kspecpara.*.txt"). Compare el espectro perpendicular con la predicción fenomenológica.

d) Utilizando los espectros de energía calcule la longitud integral isótropa L, la longitud perpendicular $L_\perp$, y la longitud paralela $L_\parallel$ en función del tiempo.

e) Estime el número de Reynolds, el número de Rossby, y el número de onda de Zeman k_Ω en el régimen turbulento. Note que como el forzado varía aleatoriamente en el tiempo, ϵ también varía y puede cambiar de signo. Por lo tanto, puede obtener una mejor estimación de k_Ω asumiendo que en el estado turbulento $dE/dt \approx 0$ (en promedio temporal), y usando $\epsilon \approx 2\nu Z$. Compare k_Ω con el mayor número de onda

resuelto. ¿Son isótropas las estructuras en las escalas mas pequeñas de este flujo?
f) Para algún tiempo $t > t_*$, grafique un corte de la vorticidad ω_z en el plano $x - z$. ¿Qué observa? ¿Son compatibles las estructuras con lo que esperaba?

Problema 2

Repita el Problema 1 considerando ahora un flujo estratificado en la aproximación de Boussinesq. Utilice entonces el solver BOUSS de GHOST, nuevamente con condiciones iniciales nulas para el campo de velocidad ($u_0 = 0$), con forzado mecánico aleatorio con amplitud $f_0 = 0.75$ centrado en los modos Fourier con k entre 1 y 4 ($kdn = 1$, $kup = 4$) pero con las mismas propiedades temporales que en el problema anterior ("rand = 2", "cort=0.5"), y sin fluctuaciones iniciales en la temperatura y sin fuentes térmicas ($c_0 = s_0 = 0$). Utilice una frecuencia de Brunt-Väisälä $N = 8$, viscosidad cinemática y difusividad térmica $\nu = \kappa = 2 \times 10^{-3}$, y $192 \times 192 \times 48$ puntos de resolución espacial en un dominio cúbico con tamaño $2\pi \times 2\pi \times \pi/2$.
a) Compare las resoluciones espaciales Δx, Δy y Δz de este problema con las del problema 1. ¿Como justifica los cambios en el tamaño del dominio y en la resolución?
b) Grafique la energía cinética, la energía potencial, y la razón entre ambas. ¿Como son las fluctuaciones térmicas comparadas con la velocidad?
c) Grafique el espectro de energía cinética isótropo $E(k)$, el espectro de energía cinética perpendicular $E(k_\perp)$, y el espectro de energía cinética paralelo $E(k_\parallel)$ promediados en el tiempo, para tiempos suficientemente tardíos. Compare los espectros con las predicciones fenomenológicas.
d) Utilizando los espectros de energía calcule la longitud integral isótropa L, la longitud perpendicular $L_\perp$, y la longitud paralela $L_\parallel$ en función del tiempo. Calcule la longitud paralela obtenida por análisis dimensional (la "longitud de empuje"), $L_B = 2\pi/k_B$ (con $k_B = N/U$, donde U es la velocidad típica del fluido), y compare esta longitud con la obtenida a partir del espectro, $L_\parallel$. Utilizando estas longitudes estime el número de Reynolds y los números de Froude paralelo y perpendicular (puede asumir $U_\perp \approx U$).
e) Para algún tiempo $t > t_*$, grafique un corte de las fluctuaciones de temperatura θ en el plano $x - z$. ¿Qué observa? ¿Son compatibles las estructuras con lo que esperaba?

Problema 3

Integre las ecuaciones MHD con un campo guía B_0 (usando el solver MHDB) desde $t = 0$ hasta $t = 20$ usando $dt = 4 \times 10^{-3}$, con $128 \times 128 \times 64$ puntos espaciales en un dominio con tamaño $2\pi \times 2\pi \times 2\pi$. Imponga un campo guía $b_{z0} = 2$, y utilice una viscosidad cinemática y difusividad magnética $\nu = \eta = 3.5 \times 10^{-3}$. Partiendo de condiciones iniciales aleatorias para el campo de velocidad y magnético con $u_0 = 1$ entre $kdn = 1$ y $kup = 10$, con una correlación cruzada K mayor a ≈ 0.3, y sin fuerzas externas, deje decaer libremente al sistema (si a $t = 0$ K es menor que ≈ 0.3, cambie el valor de la semilla "seed" para el generador de números al azar en "parameter.inp").

a) Grafique la energía total y la helicidad cruzada en función del tiempo ($\langle v^2 + b^2 \rangle$ se encuentra en la segunda columna de "balance.txt", y puede encontrar $K(t)$ en la segunda columna del archivo "cross.txt"). ¿Decaen con la misma tasa?

b) Grafique la energía cinética y magnética en función del tiempo ($\langle v^2 \rangle$ y $\langle b^2 \rangle$ se encuentran respectivamente en la segunda y tercera columna de "energy.txt").

c) Grafique $\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{b} \rangle / (\langle v^2 \rangle \langle b^2 \rangle)^{1/2}$. ¿A qué valor evoluciona? ¿Por qué?