# Temas avanzados de fluidos
# Guía 1

## Problema 1

Considere la ecuación de Burgers

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \tag{1}$$

para un fluido unidimensional con velocidad $u = u(x)$, sin presión y con densidad uniforme $\rho = 1$.

**a)** Derive la forma conservativa de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \tag{2}$$

Si $\nu = 0$, ¿a qué magnitud conservada corresponde esta ecuación cuando se la integra en un recinto $[a, b]$?

**b)** Derive una ecuación diferencial y una ecuación integral para el balance de energía cinética

$$E = \frac{u^2}{2} \quad . \tag{3}$$

¿A qué corresponde cada uno de los términos?

**c)** Muestre que $\omega = \frac{\partial u}{\partial x}$ satisface la ecuación

$$\frac{D\omega}{Dt} = -\omega^2 + \nu\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad . \tag{4}$$

Para $\nu = 0$, ¿qué implica esta ecuación para la evolución de los gradientes en $u$? ¿Qué ocurre con los puntos con $\partial_x u > 0$? ¿Y con los puntos con $\partial_x u < 0$?

**d)** Considere la condición inicial

$$u(x) = \sin(x)$$

en un recinto periódico $x \in [0, 2\pi)$. Usando esta última ecuación obtenga gráficamente la solución para $t \longrightarrow \infty$. Muestre que la evolución temporal genera un frente.

## Problema 2

Resuelva numéricamente la ecuación de Burgers con condiciones iniciales

$$u(x) = \sin(x)$$

en un recinto periódico $x \in [0, 2\pi)$ usando diferencias finitas centradas para estimar las derivadas

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{\Delta x} \quad , \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+2} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad , \tag{6}$$

y Runge–Kutta de segundo orden para evolucionar las ecuaciones en el tiempo

$$u^* = u_t + \frac{\Delta t}{2} F(u) \tag{7}$$

$$u_{t+\Delta t} = u_t + \Delta t F(u^*) \tag{8}$$

donde $F(u)$ son los términos en el lado derecho de la ecuación de Burgers. Utilice $\nu = 0.1$, $10^{-2}$ y $10^{-3}$, y varíe el número de puntos espaciales $N$ hasta resolver correctamente las derivadas espaciales. Note que el paso temporal debe reducirse al aumentar $N$ según la condición CFL

$$\Delta t < \frac{\Delta x}{U} \quad , \tag{9}$$

donde $U$ es la velocidad máxima del fluido

# Problema 3

Resuelva la misma ecuación usando un método pseudoespectral. Estime las derivadas espaciales usando que en el espacio de Fourier

$$(\widehat{\partial_x u})_k = ik\hat{u}_k \tag{10}$$

$$(\widehat{\partial^2_{xx} u})_k = -k^2 \hat{u}_k \tag{11}$$

y calcule el término no lineal $u\partial_x u$ en el espacio real. Use el método de Runge–Kutta de segundo orden para la evolución temporal. Es recomendable evolucionar la amplitud de los modos de Fourier

$$\partial_t u_k = -(\widehat{u\partial_x u})_k - k^2 u_k \tag{12}$$

y para mejorar la estabilidad numérica utilice la "regla de los 2/3" en cada paso temporal e iguale a cero todos los modos de Fourier con $|k| > \frac{N}{3}$.
Compare, para iguales valores de $N$ y $\nu$, las soluciones de los dos métodos numéricos. ¿Cómo son los gradientes en cada caso? ¿Cómo evoluciona $E$ en el tiempo?

# Problema 4

Resuelva la ecuación de Burgers con $\nu = 0$ usando ambos métodos. Estudie la conservación de la energía en cada método. ¿Qué ocurre con la solución numérica para tiempos largos en cada caso?

# Problema 5

Según (5) el término de advección en la ecuación de Burgers debería amplificar los gradientes negativos. Verifique que esto ocurre en las soluciones numéricas. Calcule, por ejemplo, histogramas de $\omega = \partial_x u$ en función del tiempo.

# Problema 6

Calcule, para diferentes instantes, el espectro de energía

$$E(k) = \frac{1}{2}|\widehat{u}_k|^2 \quad . \tag{13}$$

¿Hasta qué número de onda está definido este espectro? Estudie $E(k)$ para diferentes tiempos. ¿Cómo es $E(k)$ a $t = 0$? ¿Y a $t > 0$? ¿Cómo interpreta este resultado? (Ayuda: conviene graficar $E(k)$ en función de $k$ en escala $\log - \log$).