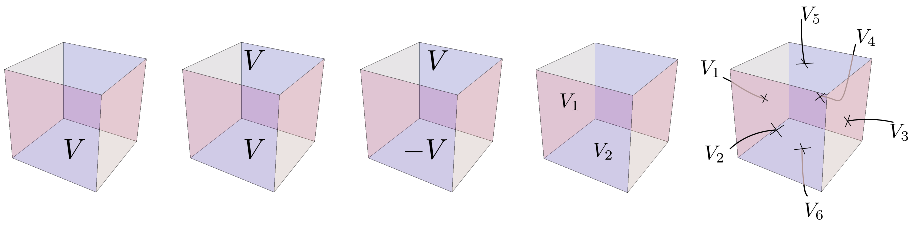
FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2012

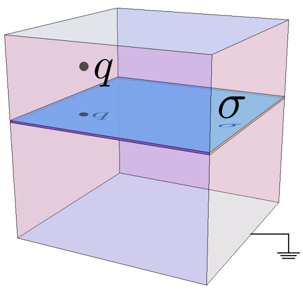
Guía 2: Separación de variables, función de Green y método de imágenes

Método de separación de variables

1. Un cubo de lado a tiene sus tapas al potencial que muestra cada figura. Las tapas donde no se indica ningún valor del potencial están a tierra. Encontrar el potencial en el interior del cubo en cada caso.



2. Un cubo de lado a está conectado a tierra. En su interior hay un cuadrado con densidad superficial uniforme σ y una carga puntual q. Calcule el potencial en *todo el espacio*.



3. Un alambre con densidad de carga constante λ está equidistante a dos placas conductoras infinitas conectadas a tierra. Utilizando separación de variables, encuentre el potencial en *todo el espacio*. Para ello divida la región entre las placas de los siguientes modos:

   (a) Con un corte vertical perpendicular a los planos.

   (b) Con un corte horizontal paralelo a los planos.

   (c) Compare las dos soluciones. ¿Se atreverá a demostrar su igualdad?

   (d) Tanto la integral como la suma de Fourier que han aparecido al aplicar las dos separaciones pueden hacerse de manera explícita y la solución es una función simple. Encuentre esa función.

4. Se pide hallar el potencial y el campo electrostático en todo punto del espacio producido por un cuadrado cargado con densidad uniforme σ. Puede asumirse que el cuadrado está sobre el plano xy, que su centro coincide con el origen y que sus lados están alineados con los ejes x e y. Utilice los siguientes métodos:

   (a) Separación de variables dividiendo el problema en dos zonas.

   (b) Escribir primero el potencial de una carga puntual como una integral de Fourier bidimensional en x e y, y luego construir la solución para el cuadrado usando superposición.

   (c) Escribir primero el potencial de una carga puntual como una integral de Fourier tridimensional, y luego construir la solución para el cuadrado usando superposición.

   (d) Usando las dos representaciones integrales para el potencial de una carga puntual obtenidas en los ítems anteriores, encuentre la transformada de Fourier unidimensional de la función $f(z) = e^{-\kappa|z|}/\kappa$.

5. Calcular el potencial electrostático en todo punto del espacio para una esfera cuya mitad superior está conectada a un potencial V_1 y la inferior a V_2. Sugerencia: puede resolver el problema directamente, o puede descomponerlo en la suma de otros más simples que tengan simetría de reflexión bien definida, es decir, como un suma de algo par más algo impar; esto simplifica las integrales.

6. (a) Encontrar el potencial de una carga puntual q entre dos cáscaras esféricas conductoras, concéntricas y conectadas a tierra, de radios a y b respectivamente.

   (b) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre cada esfera.

   (c) Observar qué sucede cuando se hace tender el radio de la esfera exterior a infinito ¿Cuánto valen las cargas totales inducidas en ese caso?

   (d) Resolver el problema en el caso en que el potencial de las esferas se eleva a V_1 y V_2, respectivamente.

   (e) Resolver el problema en el caso en que las esferas están aisladas y tienen una carga total Q_1 y Q_2, respectivamente.

7. Un cilindro de radio a y altura h tiene su superficie lateral conectada a tierra, mientras que las tapas se mantienen a potenciales V y $-V$. Hallar el potencial en el interior del cilindro.

8. (a) Usando separación de variables en coordenadas cilíndricas, hallar el potencial y el campo electrostático producidos por un disco de radio a cargado con densidad uniforme σ.

   (b) A través de límites adecuados, verificar que la expresión obtenida se reduce en un caso a la de una carga puntual, y en otro a la de un plano infinito.

   (c) ¿El disco puede ser conductor?

Función de Green.

9. Encuentre la función de Green para el problema de Dirichlet en el interior de un cilindro semiinfinito de sección cuadrada de lado a (es decir, $0 \leq x, y \leq a$, $0 \leq z < \infty$).

10. Ídem al anterior pero para un cilindro cuadrado infinito (ahora $-\infty < z < \infty$).

11. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de un cilindro circular de radio a y longitud L, separando en regiones de las siguientes maneras:

    (a) Cortando con un plano perpendicular al eje del cilindro.

    (b) Cortando con un cilindro coaxial al cilindro original.

12. Ídem al problema anterior pero para un cilindro de longitud infinita. Encuentre también la función de Green para el problema externo utilizando el segundo tipo de corte. ¿Sabría cómo resolver el problema externo usando el primer tipo de corte?

13. Encontrar la función de Green con condiciones de Dirichlet para el problema interno de una estructura con forma de cuarto de cilindro circular, infinito y de radio a, siguiendo estos dos caminos:

    (a) Usando separación de variables en el cuarto de cilindro a partir de la ecuación para $\nabla\Phi^2$ en coordenadas cilíndricas y con condiciones de contorno adecuadas.

    (b) Usando imágenes y la función de Green para el cilindro infinito obtenida en el problema anterior.

    (c) Además del problema del cuarto de cilindro, que corresponde a un ángulo de $\pi/2$ entre las tapas planas laterales, ¿para qué otros valores de ese ángulo puede resolverse el problema usando imágenes?

14. (a) Utilizando separación de variables en coordenadas cilíndricas, calcular la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos planos infinitos, ubicados en $z = 0$ y $z = L$.

    (b) Si se coloca una carga q a una altura z entre los planos, obtener una expresión para la densidad de carga y calcular explícitamente la carga total inducida sobre cada plano.

    (c) Observe que si bien la densidad superficial no tiene una expresión muy simple, el resultado para la carga total es llamativamente simple. La carga total sobre cada plano puede obtenerse de consideraciones más generales que no requieren calcular el potencial explícitamente. Lo que se usa es el llamado Teorema de Reciprocidad. Entre los problemas del capítulo 1 del Jackson figura este teorema y su aplicación al caso de los dos planos. En la tercera edición son los problemas 1.12 y 1.13. Quedan propuestos como problemas opcionales.

Método de imágenes y función de Green

15. Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ.

    (a) Hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio mediante el método de imágenes

    (b) Encontrar la distribución de cargas imagen y la carga total inducida sobre la esfera conductora. ¿Es única la distribución de cargas imagen que resuelve el problema?

16. (a) Hallar el potencial electrostático de la distribución del problema anterior utilizando el método de la función de Green.

    (b) Analizar la relación entre el método de imágenes y el de la función de Green. Identificar la procedencia de cada una de las tres contribuciones a la integral de Green.

17. (a) Una esfera de radio a está conectada a tierra. A una distancia de su centro $d > a$, hay un dipolo puntual $\mathbf{p}$. Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

    (b) Ídem (a) pero mediante el método de imágenes. Verificar que ambos resultados coinciden.

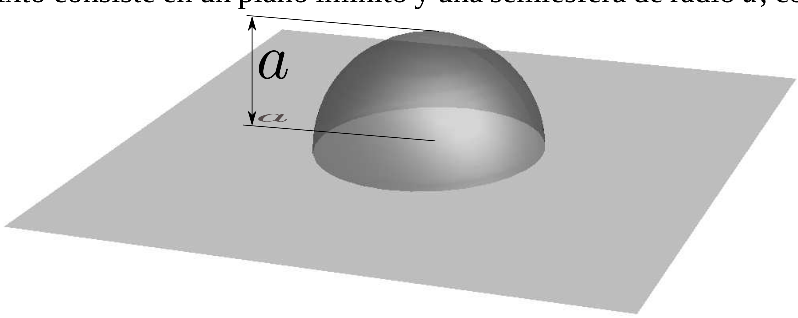
    (c) Calcular la densidad de carga inducida sobre la esfera y la carga total.

    (d) Escribir el potencial para $r \gg a$ conservando términos de hasta orden $(a/r)^3$. Interprete en términos de la carga total y del momento dipolar total de las cargas fuentes e imágenes.

    (e) Encuentre ahora el potencial en el caso en que la esfera está aislada y descargada.

18. Hallar la función de Green con condiciones de Dirichlet para la región interna entre dos esferas concéntricas de radios a y b respectivamente. Utilizar el método de imágenes. Muestre que esta solución coincide con la del problema 6. *Sugerencia*: Es necesario usar una serie infinita de imágenes. Hallar primero una relación de recurrencia para las ubicaciones y los módulos de las cargas imágenes y luego escribir la superposición adecuada.

19. Un contorno mixto consiste en un plano infinito y una semiesfera de radio a, como muestra la figura.



Calcular la función de Green de Dirichlet de esta configuración en la región por encima del contorno. Identificar cada contribución.

20. Una esfera de radio a está a tierra. Concéntrico con ella hay un anillo de radio $b > a$, cargado uniformemente con carga total Q.

    (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio usando el método de la función de Green.

    (b) Calcular el potencial sobre el eje perpendicular al plano del anillo, utilizando el método de imágenes. Luego, extender la solución para todos los puntos exteriores a la esfera mediante prolongación analítica (Jackson, sección 3.3, donde dice "Series (3.33), with its coefficients determined by the boundary..."). Comparar con el resultado del punto (a).

    (c) Calcular el potencial usando separación de variables y comparar con los resultados anteriores.

    (d) Hallar la densidad de carga y la carga total inducida sobre la esfera. ¿Qué tiene esto que ver con el método de imágenes?

    (e) ¿Cómo resolvería por el método de Green si la esfera estuviera aislada y descargada?

    Fórmulas útiles: $P_{2n+1}(0) = 0$, $P_{2n}(0) = (-1)^n \dfrac{(2n-1)}{2^n n}$, $P_0(x) = 1$.

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es el significado físico de la función de Green?

2. ¿Qué relación hay entre el método de la función de Green y el método de imágenes?

3. ¿Cómo se complementan estos dos métodos en la resolución de los problemas?

4. ¿Dónde deben colocarse las cargas imágenes?

5. Una vez colocadas las cargas imágenes, ¿qué sucede con los contornos?

6. ¿Qué relación hay entre la carga total de la distribución imagen y la carga inducida sobre el contorno?

7. Explicar las diferencias entre una solución de la ecuación de Poisson (inhomogénea), de Laplace (dividiendo en zonas) y una solución hallada por superposición. ¿Qué pasa con las condiciones de contorno?

8. ¿Cómo puede calcularse el potencial producido por una carga puntual en el centro de un cilindro conductor de radio a y altura h a potencial V? ¿En cuántas variables se presenta problema de Sturm−Liouville?

9. Una carga puntual está ubicada en el origen de coordenadas, dentro de una caja cilíndrica a potencial cero. La caja está definida por $z = -h/2$, $z = h/2$ y $r = a$. Se plantea la posibilidad de encarar el problema por dos métodos distintos: por Laplace (dividiendo en zonas) o directamente por Poisson en todo el cilindro. Discutir por qué uno de ellos es muy poco práctico en este problema.

10. ¿Es cierto lo que dice la pregunta anterior?