FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2012

Guía 3: Medios materiales

1. **Imán esférico.** Una esfera de radio a está uniformemente magnetizada con densidad $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$.

   (a) Calcular el momento dipolar de la esfera: 1) integrando directamente la densidad de magnetización, 2) calculando el momento dipolar de las cargas magnéticas, 3) calculando el momento dipolar magnético de las corrientes de magnetización. Demuestre la equivalencia de los tres métodos para el caso general de una magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ definida en todo el espacio. Para obtener esta equivalencia, ¿es necesario imponer alguna condición sobre el comportamiento de $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ cuando $\mathbf{r} \to \infty$?

   (b) Calcular los campos **B** y **H** usando la integral de Poisson para el potencial escalar magnético. Identificar el problema eléctrico equivalente. Comparar el potencial en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo puntual igual al momento dipolar total de la esfera. Observe que esto da un cuarto método para calcular el momento dipolar, una vez conocidos los campos en el exterior de la esfera.

   (c) Calcular el potencial vectorial a partir de la corriente total.

   (d) En éste y los siguientes ítems la misma esfera magnetizada está situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ. Discutir por qué los métodos utilizados en (b) y (c) no sirven para hallar **B** en este caso. Utilizar entonces el método de separación de variables. Verificar que si $\mu = 1$ se recupera el resultado anterior.

   (e) Hallar el momento dipolar total **m** inducido en el medio exterior. De los métodos enunciados en el punto (a), ¿cuáles son válidos en este caso?

   (f) Suponga ahora que el medio de permeabilidad μ se extiende únicamente hasta un radio $b > a$, concéntrico con la esfera. Calcule los campos **B** y **H** en todo el espacio y encuentre el momento magnético total **m** inducido en el medio. Verifque que para $\mu = 1$ se obtienen los resultados de (a$-$c). Estudie el límite en que $b \to \infty$ y compare con los resultados para **B**, **H** y **m** de los puntos (d) y (e). ¿Qué sucede con **m**?

   (g) Comparando las fuentes del campo en cada caso, probar que una esfera hueca cargada con densidad superficial σ y que rota con velocidad angular $\omega = \omega_0\hat{z}$ constituye un problema equivalente al de la esfera con magnetización uniforme. A partir de los resultados de los puntos anteriores, por simple identificación, deducir el momento magnético de la esfera rotante y los campos **B** y **H** en todo el espacio.

2. Calcular los campos **B** y **H** en todo punto del espacio producidos por:

   (a) Un imán cilíndrico, de radio a y longitud L, caracterizado por una densidad de magnetización uniforme **M** paralela al eje del cilindro.

   (b) Un solenoide de las mismas dimensiones por el que circula una corriente I y que tiene n espiras por unidad de longitud.

   (c) Dos barras cilíndricas semiinfinitas de radio a, magnetizadas con densidad uniforme $\mathbf{M} = M\,\hat{z}$. Una de las barras se extiende con su eje a lo largo del semieeje $z > 0$ y con su extremo en $z = h/2$, y la otra, a lo largo del semieje $z < 0$ y con su extremo en $z = -h/2$.

3. Por un cable rectilíneo de radio a circula una corriente I. Concéntrico con el cable hay un cilindro de hierro dulce ($\mu = 1000$) de radio interior b y exterior c. Dentro y fuera del cilindro hay vacío. La permeabilidad del cable vale 1.

   (a) Calcular y graficar $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ y $\mathbf{M}$ en todo punto del espacio.

   (b) ¿Es efectivo el cilindro de hierro dulce para apantallar el campo magnético en la zona $r > a$?

   (c) Encontrar la densidad de corriente de magnetización en volumen y en superficie y las cargas de magnetización.

   (d) Explicar la relación entre cada campo y sus fuentes.

4. Considere una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ε_1 sumergida en otro medio de permitividad ε_2. A una distancia $d < a$ del centro de la esfera se encuentra una carga q.

   (a) Halle el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   (b) Halle las densidades de carga de polarización en volumen y superficie.

   (c) Repita sus cálculos si ahora es $d > a$.

5. Una esfera homogénea de radio b tiene permitividad ε y es concéntrica con una cáscara esférica con densidad de carga $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ y radio a. El conjunto se halla sumergido en un campo eléctrico uniforme al infinito $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \hat{z}$.

   (a) Calcular el potencial en todo punto del espacio.

   (b) Hallar la distribución de cargas inducidas en $r = b$.

6. (a) En un medio de constante dieléctrica ε se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.

   (b) La misma esfera conductora del caso anterior se conecta ahora a un potencial V. Resolver lo mismo del caso anterior. Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, se manifiesta una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con ε. Explicar las causas de esta diferencia.

7. Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q.

   (a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.

   (b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q. Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r?

   (c) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \to \infty$? ¿Puede dar alguna interpretación física de este resultado?

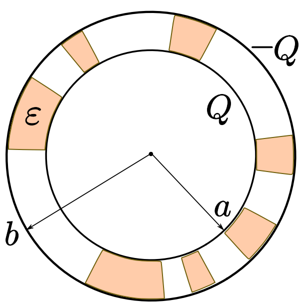
(d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ε_1 y el inferior por un medio con permitividad ε_2. ¿Cuál es la magnitud importante?

(e) Encuentre la función de Green para todo el espacio según las condiciones del ítem anterior. (Notar que la carga puede estar en cualquier posición, por encima y por debajo del plano $z = 0$.)

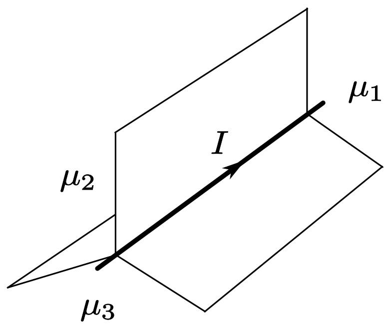
8. Las esferas de la figura tienen radios a y b, son conductoras y están aisladas. El espacio entre las dos esferas estaba originalmente ocupado por un dieléctrico uniforme de permitividad ε, formando todo el conjunto un capacitor esférico en buenas condiciones. Con el tiempo (imaginemos) las pérdidas eléctricas por sobrecarga −vulgarmente *pinchaduras*− han erosionado al dieléctrico, dejando espacios vacíos entre las esferas. Estos espacios empiezan en una esfera y terminan en la otra, no son uniformes y se extienden por trechos al azar, pero se caracterizan por tener sus paredes orientadas según la dirección radial, que es la dirección en la que se producen las descargas. Un porcentaje x del diélectrico ha sido erosionado.

   Si sobre la esfera de radio a se deposita una carga Q, y $-Q$ sobre la de radio b:

   1) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio.
   2) Encuentre los campos **E** y **D** en la región entre las dos esferas.
   3) Encuentre la distribución de carga libre, de polarización y de carga neta.



Problema 8



Problema 9

9. Una corriente I fluye por un cable delgado a lo largo del eje z (ver figura). Tres semiplanos que forman entre sí angulos α_1, α_2 y α_3 ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$) se intersectan a lo largo de ese eje. Las regiones entre los planos tienen permeabilidades μ_1, μ_2 y μ_3. Encuentre **B** y **H** en todo el espacio e interprete físicamente el resultado.