FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2012
Guía 4: Momentos multipolares

1. (a) Probar que, salvo el monopolar, todos los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos.

   (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.

   (c) Encontrar las expresiones para los momentos multipolares (en esféricas) de una distribución con simetría azimutal y escribir la expansión correspondiente.

2. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:

   (a) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.

   (b) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro.

   (c) Una distribución plana formada por cuatro cargas: dos de valor q y dos de valor $-q$, situadas alternativamente en los vértices de un cuadrado de lado s. Analizar el límite $s \to 0, qs^2 \to$ cte.

3. Calcular el potencial y el campo creados por un disco de radio a con una densidad superficial de momento dipolar $\mathbf{p}$ perpendicular al disco. Resuelva el problema de estas tres maneras:

   (a) Por separación de variables, considerando al disco como una capa dipolar. (Dese una vuelta por el Jackson para saber qué condiciones de continuidad y salto cumple Φ.)

   (b) Por superposición, a partir de los campos conocidos de un disco cargado con densidad σ.

   (c) A partir de la integral de Poisson $\int d^3r' \rho(\mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, usando la densidad de carga que se obtiene a partir de la divergencia de la polarización.

   Calcule todos los momentos multipolares.

4. Calcule todos los momentos multipolares del problema (20) de la Guía 2 (anillo de radio b, cargado uniformemente, concéntrico con una esfera a tierra de radio $a < b$.)

5. Calcule todos los momentos multipolares del problema (8) de la Guía 2 (disco de radio a, cargado uniformemente). Para eso encuentre el potencial en la región $r > a$ usando prolongación analítica.

6. La distribución de carga $\rho(\mathbf{r})$ de un núcleo atómico está concentrada en dimensiones del orden de 10^{-13}cm. El potencial se aproxima en general por $\phi = Ze/r$, lo que equivale a suponer que $\rho(\mathbf{r})$ tiene simetría esférica. No hay evidencia de que ningún núcleo tenga momento dipolar. Sin embargo, sí existe evidencia de que muchos tienen momento cuadrupolar Q distinto de cero.

   (a) Para simplificar, considere $\rho(\mathbf{r})$ uniforme en un elipsoide de revolución de semiejes a y b. Calcule Q respecto de ejes apropiados. La carga total es $q = Ze$.

   (b) ¿Qué característica cualitativa del elipsoide revela el signo de Q_{zz}?

(c) Números: para $Z = 63$, $Q_{zz}/e = 2.5 \times 10^{-24}\text{cm}^2$. Suponiendo que el radio medio es $R = (a+b)/2 = 7 \times 10^{-13}$cm, determinar la diferencia $(a-b)/R$.

(d) Un núcleo de los descriptos en (a) está en el origen, su eje de simetría alineado con el eje z. Hay un campo eléctrico externo con simetría cilíndrica y con una variación espacial caracterizada por $\partial E_z/\partial z \neq 0$. Muestre que la energía de interacción entre el cuadrupolo y el campo es

$$W = -\frac{Q_{zz}}{4} \left.\frac{\partial E_z}{\partial z}\right|_0 .$$

7. (Opcional.) Para una distribución de carga acotada, lejos del sistema de cargas el campo puede desarrollarse en potencias de $1/r$ a partir de la integral de Poisson

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_V d^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_V d^3\mathbf{r}' \, \frac{\rho(\mathbf{r}')}{r}\Big[1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}'}{r^2} + \dots\Big].$$

De los primeros términos, el dipolar y el cuadrupolar se escriben como

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{r_i\, p_i}{r^3}, \;\; \Phi_3(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j\, Q_{ij}}{2r^5}, \;\; \text{donde} \;\; p_i = \int d^3\mathbf{r}\; \rho(\mathbf{r}) r_i, \;\; Q_{ij} = \int d^3\mathbf{r}\; \rho(\mathbf{r}) \left(3r_i r_j - \delta_{i,j} r^2\right).$$

Continúe el desarrollo de Φ hasta los dos órdenes siguientes, es decir, hasta términos de orden $1/r^5$. El resultado debe escribirse en la forma

$$\Phi_4(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j r_k\, Q^{(3)}_{ijk}}{3r^7}, \qquad \Phi_5(\mathbf{r}) = \frac{r_i r_j r_k r_l\, Q^{(4)}_{ijkl}}{4r^9},$$

donde los tensores $Q^{(n)}_{ij\ldots}$ son completamente simétricos y $Q^{(n)}_{iik\ldots} = 0$ (¿por qué?). ¿Cuántos elementos independientes tiene un tal tensor? Luego, calcule hasta el primer orden no nulo el potencial de un cubo macizo cargado y revea el problema (2-b).

Preguntas Molestas

1. ¿Cuál es el cuadrupolo de un dipolo ideal? ¿Cuál es el dipolo de una carga puntual? ¿Y el cuadrupolo? ¿De qué dependen las respuestas a las preguntas anteriores?

2. Al resolver un problema interno usando el método de imágenes. ¿Cuál es la contribución de las cargas imágenes a los momentos multipolares?

3. ¿Cuáles son los momentos multipolares no nulos de las siguientes distribuciones?

   (a) Cilindro infinito cargado con una densidad arbitraria.

   (b) Un dipolo en la dirección z rodeado por una cáscara esférica conductora conectada a tierra no concéntrica con él.

4. En el caso de un cuerpo con densidad de magnetización permanente $\mathbf{M}$, $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$. Como $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, tenemos que:

$$\mathbf{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\,\mu}\,\mathbf{B},$$

o sea que $\mathbf{M}$, que es constante, es proporcional a $\mathbf{B}$, que en principio puede ser arbitrario (¿o no?), y siempre con la misma constante de proporcionalidad. ¿Cuál es el error en ese razonamiento?

5. Encontrar el campo $\mathbf{B}$ de un toro de sección circular con una magnetización uniforme de la forma $\mathbf{M} = M_0\hat{\phi}$. ¿Cómo cambian los resultados si el toro está sumergido en un medio de permeabilidad μ? ¿Y si el toro no tiene sección circular?