Resolución de ejercicios de ondas planas

Propagación de Ondas en un Conductor

La ecuación de Maxwell-Ampere en un medio dieléctrico de permitividad ϵ se escribe

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

En un medio conductor que sigue la ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, tenemos

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mu\sigma\,\mathbf{E} + \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Esta ecuación combinada con la ley de Faraday, $\nabla \times \mathbf{E} = -1/c\partial\mathbf{B}/\partial t$ nos da la ecuación

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\,4\pi\sigma\mu\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{\mu\epsilon}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Cuyas soluciones dependientes del tiempo se pueden desarrollar en la base armónica, $\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$, dando lugar a la ecuación

$$\nabla^2\mathbf{E}_0 + \frac{\mu}{c}\overbrace{(\epsilon + i\,\frac{4\pi\sigma}{\omega})}^{\epsilon^*}\,\omega^2\,\mathbf{E}_0 = 0$$

Que es *la misma ecuación* que obedece una onda en un medio dieléctrico con la diferencia que es este caso el vector de onda $\mathbf{k}$ es complejo, $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\mu\epsilon^* = \frac{\omega^2}{c^2}\,\mu(\epsilon + i\frac{4\pi\sigma}{\omega})$. Por lo tanto $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ *es* solución.

Asi, dentro de un conductor tenemos que una onda plana tambien se propaga a la vez que su magnitud se atenua. Como de costumbre la ley de Faraday también nos permite obtener el campo $\mathbf{H} = \frac{c}{\omega\mu}\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0$, lo que muestra, al ser k complejo que los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ no están más en fase.

A partir de las expresiones para $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, y $\mathbf{H}$ podemos calcular el promedio de la densidad de energía contenido en el campo eléctrico y en el magnético. Para esto primero vamos a separar explicitamente el vector de onda complejo $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$ en partes real ($\mathbf{k}'$) e imaginaria ($\mathbf{k}''$). Asi podemos escribir [1]

$$\langle u_E \rangle = \langle \frac{1}{8\pi}\mathbf{E}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{8\pi}\,\frac{1}{2}\mathrm{Re}\,[\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0^*]$$

[1] Notar que hemos usado la propiedad $\langle AB\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{Re}[AB*]$ válida para campos armónicos

Con esto,

$$\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{D}_0^* = \epsilon |E_0|^2 e^{i(\cancel{\mathbf{k}'}+i\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}}\, e^{-i(\cancel{\mathbf{k}'}-i\mathbf{k}'')\cdot\mathbf{r}} = \frac{\epsilon}{16\pi}|E_0|^2\, e^{-2\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}$$

Lo cual muestra que la energía se disipa dentro del conductor. Similarmente para la energía magnética se obtiene

$$\langle u_M \rangle = \langle \frac{1}{8\pi}\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{1}{16\pi}\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \frac{1}{\mu}\,|E_0|^2\,(k'^2 + k''^2)\, e^{-2\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}$$

Teniendo en cuenta que $k'^2 - k''^2 = \Re\mathrm{e}\,[k^2] = (\frac{\omega}{c})^2\mu\epsilon$, el cociente entre ambas densidades de energías lo podemos escribir,

$$\frac{\langle u_E \rangle}{\langle u_M \rangle} = \frac{\epsilon\,\omega^2\,\mu}{c^2(k'^2 + k''^2)} = \frac{k'^2 - k''^2}{k'^2 + k''^2}.$$

En el caso de un mal conductor $4\pi\sigma/(\varepsilon\omega) \ll 1$ y $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\mu\varepsilon}\left(1 + \frac{2\pi\sigma}{\varepsilon\omega}\right)$, mientras que un muy buen conductor tiene $k = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\delta}$

Presión sobre un espejo perfecto

Queremos ver que pasa cuando luz monocromática polarizada linealmente incide sobre un espejo perfecto. El espejo perfecto está hecho de un conductor ideal ($\sigma = \infty$) por lo tanto sabemos que dentro de un conductor perfecto el campo eléctrico es identicamente nulo. Tambien sabemos que las leyes de Maxwell en el medio vacio-espejo son

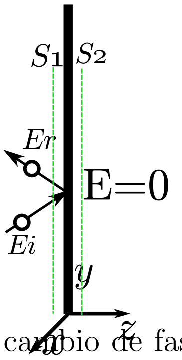
$$\nabla\cdot\mathbf{D} = \rho_{\mathrm{Libre}} \quad (1), \qquad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \quad (2), \qquad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

$$\nabla\times\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{\mathrm{libre}} + \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} \quad (4)$$

Como de las densidades de carga y corriente libres solo sabemos hasta ahora que puede estar solo en la interfaz solamente para un conductor perfecto, las ecuaciones (1) y (4) no nos dan mucha información, sin embargo la (2) y (3) nos dicen que la componente de **E** tangencial al espejo y la componente de **B** normal al espejo *no cambian* al atravesarlo. Por lo tanto como en el espejo ideal $\mathbf{E} = 0$, tiene que ser que la componente de **E** tangencial deberá ser cero del lado del vacio justo antes del espejo. Matematicamente si la interfaz está en el plano $z = 0$ sabemos que

$$\mathbf{E}\times\hat{z}\Big|_{z=0-} = 0, \quad \text{El producto } \times \text{ nos da la componente tangencial de } \mathbf{E}.$$

Para encontrar explícitamente los campos reflejados trabajemos con un onda incidenente con polarización TE. Asi, si la onda incide con un ángulo θ_i tenemos que en el lado del vacio el campo $\mathbf{E}$ se escribe



$$\mathbf{E} = E_i \hat{y}\, e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + E_r \hat{y} e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$$

con $\hat{k}_i = \cos\theta_i \hat{z} + \sin\theta_i \hat{x}$, $\quad$ y $\qquad \hat{k}_r = -\cos\theta_i \hat{z} + \sin\theta_i \hat{x}$.

Como $\mathbf{E}_\parallel$ no cambia tenemos que $\mathbf{E}|_{z=0} = 0 = (E_i + E_r)\hat{y} = 0 \rightarrow \boxed{E_r = -E_i}$. Es decir que la onda reflejada tiene la misma amplitud que la incidente y adquiere un cambio de fase de π. A partir del campo eléctrico calculamos el magnético, sabiendo que para una (sola) onda plana vale $\mathbf{B} = n\hat{k} \times \mathbf{E}$ donde n es el índice de refracción, en este caso $n = 1$ por ser el vacío. Y superponemos las ondas incidentes y reflejadas. Es decir,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \hat{k}_i \times \left(E_i\, \hat{y} e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) + \hat{k}_r \times \left(E_r\, \hat{y}\, e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right) \\
&= E_i \left[(-\cos\theta_i\, \hat{x} + \sin\theta_i\, \hat{z}) e^{i(\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}-\omega t)} - (\cos\theta_i\, \hat{x} + \sin\theta_i\, \hat{z}) e^{i(\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right]
\end{aligned}$$

Notar que en este caso es la componente de $\mathbf{B}$ normal ($\hat{z}$) a la interfaz la que se anula sobre el espejo. (¿Por qué?).

A partir de la expresión de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la proximidad del espejo podemos calcular la presión que se le ejerce sobre el mismo. Para esto vamos a utilizar el tensor de Maxwell. Como sabemos, en promedio temporal la variación del impulso lineal asociado al campo electromagnético es cero (léase, $\langle d(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/dt \rangle = 0$) y por lo tanto de la ley de conservación del impulso sabemos que la variación del impulso mecánico de las cargas y/o corrientes (¿Donde hay?) es igual al flujo del tensor de Maxweel a través de una superficie que encierre las fuentes. O sea,

$$\overbrace{\langle F_i \rangle}^{\substack{\text{cargas y}\\ \text{corrientes}}} = \frac{dP_i}{dt} = \oint \langle T_{ij}\, n_j \rangle\, dS$$

Para hacer las cuentas más fáciles la superficie cerrada que vamos a usar es la formada por las superficies infinitas S_1 y S_2 paralelas al espejo y a ambos lados del mismo (ver dibujo). Así la fuerza neta la podemos separar en los flujos del tensor de Maxwell sobre S_1 y S_2, pero como del lado del espejo perfecto no hay campos electromagnéticos, el tensor se anula y por lo tanto no contribuye a la fuerza. En consecuencia

$$\mathbf{F} = F_z \hat{z} = -\hat{z} \int_{S_1} \langle T_{zz}|_{z=0^-} \rangle dS_1$$

donde el menos proviene de la dirección de la normal externa a la superficie. ($\hat{n} = -\hat{z}$ sobre S_1). Lo único que queda es evaluar los campos para armar el tensor. Como elegimos TE para la polarización de la onda, teníamos que justo antes del espejo $\mathbf{E} = 0$ (es solo tangencial!), mientras que $\mathbf{B}$ tiene componente $\hat{x}$, $\mathbf{B}(z=0) = -2E_i \cos\theta_i \, e^{i(k \sin\theta_i x - \omega t)} \, \hat{x}$. Con esto

$$\langle T_{zz} \rangle = \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left[\frac{1}{4\pi} \left(-\frac{1}{4} \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* \right) \right] = -\frac{\cos^2\theta_i}{4\pi} |E_i|^2$$

y la presión por radiación vale, $p_{\mathrm{rad}} = -F_z = \frac{\cos^2\theta_i}{4\pi} |E_i|^2$.