FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2012

Guía 7: Relatividad y formulación covariante

1. * Supongamos 2 referenciales inerciales S y S' en movimiento relativo, con velocidad $\vec{V}$, uno con respecto al otro. En O y O' (orígenes de S y S', respectivamente) hay sendos observadores que pasan uno frente al otro cuando $t = t' = 0$. El eje $O'x'$ de S' se desliza sobre el eje Ox de S (o sea $\vec{V}$ tiene la dirección de Ox y $O'x'$). En los puntos del eje Ox con $x = -d$ y $x = +d$ hay sendos relojes en reposo en el sistema S. El observador que está en O quiere sincronizar estos relojes con el suyo propio y para ello envía simultáneamente desde O en $t = 0$ dos rayos de luz, uno hacia adelante y otro hacia atrás, según el eje x. Cada reloj tiene un mecanismo que le permite detectar el rayo de luz, y al hacerlo el reloj queda puesto automáticamente a la hora $t = d/c$. Para verificar que los mecanismos de sincronización que tiene cada reloj han funcionado correctamente el observador en O envía dos ayudantes suyos, cada uno de los cuales lleva en la mano un reloj sincronizado con el del observador O, hacia los lugares de S donde están colocados los relojes fijos (en $x = -d$ y $x = +d$), debiendo cada ayudante verificar que el reloj fijo que encuentra y que el que lleva en su mano están sincronizados. Los ayudantes se mueven a una velocidad $\vec{v}$ muy pequeña ($v \ll c$) por lo cual se puede despreciar el atraso de los relojes respecto del reloj fijo en O (tal y como se ven las cosas desde S). Los ayudantes verifican que al llegar a los relojes fijos estos se encuentran sincronizados con los suyos.

   (a) Según ve las cosas el observador que está en O', ¿están los relojes fijos en $x = \pm d$ sincronizados entre sí y con el del observador en O?. Responder: i) Usando que para todos los observadores la luz tiene siempre velocidad c, ii) Usando las transformaciones de Lorentz. ¿En qué instante llega el rayo de luz a cada reloj, según ven las cosas los observadores de O' y O?.

   (b) ¿Cómo explica el observador de O' que los ayudantes de su colega de O encuentren los relojes fijos de S sincronizados con los suyos?. Cuando el observador de O' pasa frente al reloj fijo de S, en $x = +d$, ¿qué hora marca este reloj?, ¿y qué hora el reloj del observador en O'?. ¿Cómo explican las cosas los observadores de O y O'.

   (c) ¿Cuál es el tiempo propio entre el instante en que O' pasa frente a O y el instante en que pasa frente al reloj de S que está en $x = +d$?, ¿y entre el instante en que es emitido el rayo de luz desde O y el instante en que el reloj en $x = d$ recibe la luz?. El intervalo entre las dos llegadas de la luz a $x = +d$ y a $x = -d$ ¿es espacial o temporal?, ¿cuánto vale?.

2. *

   (a) El día que cumplía 21 años Pedro se despide de su mellizo Pablo, que queda en tierra, para emprender un viaje espacial en un cohete que se mueve con velocidad $\beta = 24/25$ respecto de la tierra. Luego de 7 años de viaje, según su reloj , Pedro invierte el sentido de su movimiento para regresar a la tierra en otros 7 años, y reencontrarse con Pablo. ¿Qué edad tiene cada uno cuando se vuelven a ver? Analizar el problema desde el punto de vista de ambos. Realice un diagrama de espacio - tiempo para analizar mejor la situación.

   (b) ¿Qué edad tiene cada gemelo cuando se invierte la velocidad del cohete? Discutir los puntos de vista de Pablo y de Pedro antes y después de la inversión de velocidades.

   (c) Supongamos que tanto Pablo como Pedro se envían, uno al otro, pulsos de luz. Ambos se pusieron de acuerdo en enviar los pulsos periódicamente, con el mismo período τ_o entre dos pulsos sucesivos. De esta forma es posible a cada mellizo "medir" la edad del otro. ¿Qué edad atribuye así cada mellizo al otro?

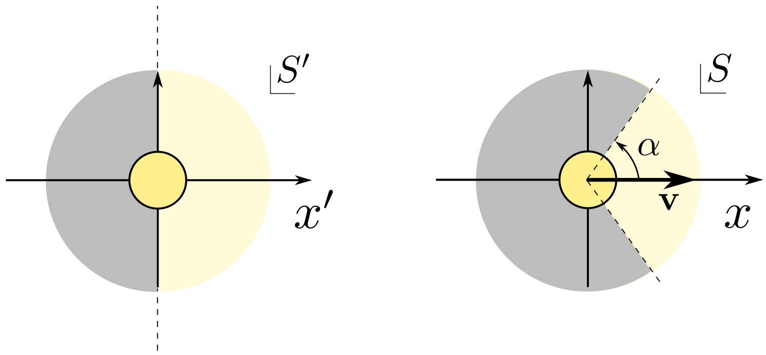
3. Desde un cohete que viaja con velocidad $\vec{v}$ respecto del referencial del laboratorio se emiten señales luminosas de frecuencia ν_o (respecto del cohete). Si $\vec{v} \parallel Ox$: determinar para cualquier punto del plano (xy) del referencial del laboratorio la frecuencia ν con que se recibirá allí la luz emitida por el cohete (efecto Doppler).

   (a) Haga el cálculo suponiendo que la luz consiste de pulsos emitidos periódicamente desde el cohete, con período $\tau_o = 1/\nu_o$. Entonces $\tau = 1/\nu$, donde τ es el tiempo entre la recepción de dos pulsos sucesivos en un punto dado del referencial del laboratorio. Realice el cálculo directamente y usando diagramas de espacio-tiempo. Analice el punto de vista de un observador del cohete y otro del laboratorio.

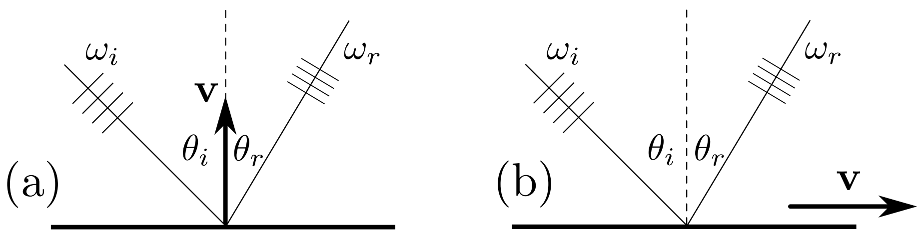
   (b) Asuma que la luz está formada por fotones de energía $E = h\nu$ y masa en reposo nula que viajan a velocidad c, ¿cuál será su impulso?. Haciendo esta hipótesis deduzca nuevamente los resultados de a).

Óptica relativista

4. Respecto del sistema S' en que está en reposo, una fuente emite luz en forma isotrópica. La misma fuente es observada desde un sistema S respecto al cual se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$. Demostrar que la luz emitida en el sistema propio de la fuente hacia el semiespacio $x' > 0$, en el sistema S se concentra en un cono de ángulo α, tal que $\tan(\alpha/2) = \sqrt{(1-\beta)/(1+\beta)}$.



5. Encontrar la relación entre los ángulos de incidencia y de reflexión para una onda plana que incide sobre un espejo perfecto en movimiento, considerando sólo los siguientes casos: (a) velocidad paralela a la superficie del espejo, y (b) velocidad perpendicular a la superficie del espejo.



Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas contra una pared en movimiento. Si la onda incidente tiene frecuencia ω, ¿cuál es, en cada caso, la frecuencia de la onda reflejada? Para incidencia normal analice aquí también el límite $v \ll c$ y compare con los casos de flujo de partículas y de ondas de sonido.

Transformación de los campos y de las fuentes

6. A partir de la expresión del tensor de intensidad del campo electromagnético, obtener las leyes de transformación de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ al cambiar de sistema de referencia inercial. Analizar los siguientes casos particulares: 1) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \| \mathbf{v}$; 2) $\mathbf{B} = 0$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{v}$; 3) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \| \mathbf{v}$; 4) $\mathbf{E} = 0$, $\mathbf{B} \perp \mathbf{v}$. Demostrar que:

   (a) Si $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ son perpendiculares en un sistema de referencia, lo mismo sucede en cualquier otro.

   (b) Si $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$ en un sistema de referencia, esto se cumple en cualquier otro sistema.

   (c) Si $\mathbf{E}$ es perpendicular a $\mathbf{B}$ y $|\mathbf{E}| \neq |\mathbf{B}|$, entonces hay un sistema en el cual sólo hay campo eléctrico o solamente magnético. ¿Siempre hay solución? ¿Es única?

7. En un sistema de referencia inercial S, el campo eléctrico forma un ángulo θ con el campo magnético. Ambos campos son uniformes y estáticos.

   (a) Encontrar un sistema de referencia S' tal que los campos sean paralelos.

   (b) Si en S los módulos de los campos cumplen $B_0 = 2E_0$, calcular los campos en el sistema de referencia hallado en (a). Tomar el límite para $\theta \ll 1$ y para $\theta \to \pi/2$. En cada caso verificar el comportamiento de los invariantes.

8. Un cilindro circular macizo y de longitud infinita tiene densidad de carga y de corriente uniformes. La corriente es paralela al eje del cilindro.

   (a) Encontrar un sistema de referencia en el cual sólo hay campo magnético o eléctrico. ¿Es único?

   (b) Hallar el valor de los campos en el nuevo sistema.

9. Una barra infinitamente larga y de sección circular está cargada uniformemente en volumen.

   (a) Calcular los campos en un sistema de referencia que se mueve paralelo a la barra. Primero, a partir de las distribuciones de carga y corriente en el nuevo sistema, y luego por transformación directa de los campos.

   (b) Ahora hay dos barras como la anterior, dispuestas una paralela a la otra y en reposo relativo. Demostrar que la fuerza por unidad de longitud sobre cualquiera de las barras, medida en un sistema de referencia S' que se mueve paralelo a ellas, es la misma que en el sistema S en el que las barras están en reposo. Primero, a partir de la fuerza de Lorentz y de los campos en S', y luego demostrando que el objeto $f^\mu \equiv \frac{1}{c} F^\mu_{\ \nu} j^\nu$ es el cuadrivector que es generalización covariante de la densidad de fuerza. Como “yapa” del segundo método, obtener la ley de transformación relativista para la potencia disipada por efecto Joule.

10. Un dipolo magnético puntual $\mathbf{m}$ se encuentra en reposo en el origen de un sistema S', por lo tanto los potenciales en este sistema están dados por $\Phi' = 0$ y $\mathbf{A}' = \mathbf{m} \times \mathbf{r}'/r'^3$. El sistema S' se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ respecto al sistema de laboratorio S.

    (a) Demostrar que en S los potenciales a primer orden en β son

    $$\Phi = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{m}) \cdot \mathbf{R}}{c\, R^3}, \qquad \mathbf{A} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{R}}{R^3},$$

    con $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)$, donde $\mathbf{r}_0(t)$ es la posición del origen de S' medida en S.

(b) A partir de estos potenciales, calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en S y mostrar que el campo eléctrico se puede escribir de las siguientes maneras alternativas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/c) - \mathbf{m} \times \frac{[3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{n} - \mathbf{v}]}{cR^3}, \\
\mathbf{E} &= \mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{v} \times \mathbf{m}/2c) + \frac{3}{2}\mathbf{n} \times \frac{[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{v})\mathbf{m} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{m})\mathbf{v}]}{cR^3}, \\
\mathbf{E} &= \mathbf{B} \times \mathbf{v}/c,
\end{aligned}
$$

donde $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R$ y $\mathbf{E}_{\text{dipolo}}(\mathbf{p}_{\text{ef}} = \mathbf{p})$ es el campo eléctrico de un dipolo efectivo de valor $\mathbf{p}$.

11. **Ley de Biot y Savart revisada.** Un hilo con corriente I se encuentra sobre el eje x. La corriente puede atribuirse a una densidad lineal de carga de valor λ_0 que se mueve a velocidad $\mathbf{v} = v\,\hat{x}$, es decir $I = \lambda_0 v$. Calcule el campo magnético integrando el campo producido por cada elemento de carga. Use para los campos las expresiones relativistas completas

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E},$$

con

$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = q\left[\frac{(\mathbf{n}-\boldsymbol{\beta})/\gamma^2}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\mathbf{n})^3R^2}\right]_{\text{ret}} \qquad \text{o} \qquad \mathbf{E}(t,\mathbf{r}) = q\frac{\mathbf{n}/\gamma^2}{(1-\beta^2\sin^2\psi)^{3/2}R^2},$$

donde $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t)$ y ψ es el ángulo entre $\mathbf{v}$ y $\mathbf{r}$. Notar que en la segunda expresión aparecen todas cantidades evaluadas en el tiempo t, no en el tiempo retardado. Si utiliza la primera expresión para $\mathbf{E}$ deberá calcular cuál es la densidad lineal de carga $\lambda(x)$ "vista" desde $\mathbf{r}$. Ya sea que tome o no ese camino, calcule esa densidad. Lo que hay que notar al final de este problema es que aunque el campo de cada elemento de carga tiene correcciones relativistas, el campo de todo el hilo sigue estando dado por la ley de Bioy y Savart. Para una discusión de este tema ver Jackson 3ra. ed., nota al pie de la página 176, en la sección "Biot and Savart Law".

12. Dos partículas cargadas se mueven con velocidad constante en direcciones ortogonales. Calcular la fuerza que cada carga ejerce sobre la otra en el instante en que una de las partículas cruza la dirección de movimiento de la otra. Verificar que las fuerzas no son iguales y opuestas. Por lo tanto, no se conserva el impulso lineal de las partículas ¿Hay en ello alguna contradicción?

13. **Trayectorias de partículas cargadas**. Encontrar la trayectoria de una partícula cargada en cada caso:

    (a) Movimiento en un campo eléctrico uniforme y estático, dirigido según el eje x. La condición inicial es $p_x = p_z = 0$ y $p_y = p_0$. Demostrar que en el límite no relativista se obtiene el resultado conocido de mecánica clásica, es decir, una parábola.

    (b) Movimiento en un campo magnético uniforme y estático.

    (c) Movimiento en campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ cruzados, perpendiculares entre sí, uniformes y estáticos. Considerar los tres casos posibles: (a) $|\mathbf{E}| > |\mathbf{B}|$, (b) $|\mathbf{E}| < |\mathbf{B}|$ y (c) $|\mathbf{E}| = |\mathbf{B}|$.

Preguntas Molestas

1. ¿Es posible que una partícula viaje con velocidad mayor que c?

2. ¿Es posible enviar señales a velocidades mayores que la de la luz? ¿Qué ocurre con la causalidad? (Visualizarlo en un diagrama de espacio-tiempo).

3. Una barra rígida forma un ángulo α con el eje x. En el instante inicial el centro de la barra está en el origen y toda la barra se mueve con velocidad v según el eje y. Determine la velocidad w del punto a de intersección de la barra con el eje x. ¿Puede ser $w > c$? ¿Puede utilizarse este sistema para enviar señales a velocidades mayores que c?

4. Un faro rota uniformemente con velocidad angular ω, emitiendo una señal luminosa. Si tomamos 2 puntos a y b muy alejados del faro, la señal pasa de a a b a velocidad mayor que c. ¿Contradice esto la Relatividad?

5. ¿Es compatible con la Relatividad la existencia de cuerpos perfectamente rígidos?

6. ¿En qué caso se conserva y en qué caso no, la dirección de una barra al hacer una transformación de Lorentz?

7. En un sistema de referencia S, el intervalo entre dos eventos dados es de tipo espacial. ¿Es posible encontrar un sistema S' tal que el intervalo entre los mismos eventos sea de tipo temporal?

8. ¿Cómo pueden graficarse los ejes de un sistema S' que se mueve con respecto a S en el diagrama de espacio-tiempo de S? ¿Qué ocurre con el cono de luz en ambos sistemas? ¿Cómo se ve en estos diagramas la relatividad de la simultaneidad?

9. El vector de onda de una onda plana, ¿es un invariante? ¿Qué tiene que ver esto con la aberración de la luz?

10. ¿Cuál es la ley de transformación de la fuerza de Lorentz?

11. ¿Por qué en el marco de la relatividad espacial no tiene sentido hablar de campo eléctrico o magnético, sino del campo electromagnético?

12. ¿En el caso de una carga en movimiento, si uno compara las líneas de campo eléctrico vistas desde el sistema S' en el que la carga está en reposo, con las líneas de campo vistas desde S, se ve que en este último caso las líneas se encuentran comprimidas en la dirección del movimiento. ¿No se contradice esto con el hecho de que $E_{\|}$ se conserva?

13. ¿Cómo se escriben las leyes de conservación de la energía y del impulso en forma covariante?