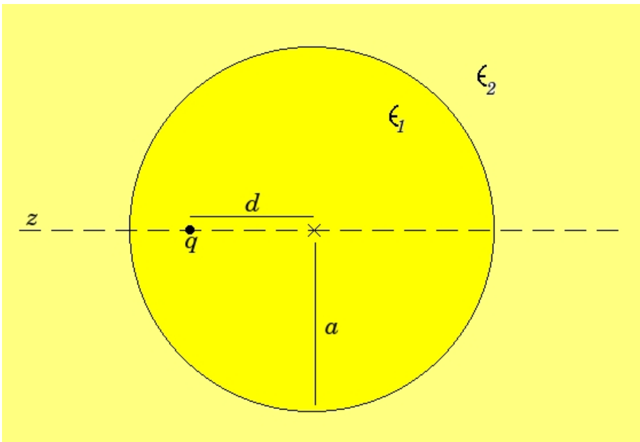
Ejercicios hechos en la práctica del 23/09

Parte I

Escribo estas notas pensando más que nada en los chicos que se fueron de viaje a la AFA, pero más vale que están invitados a hacer con ellas lo que fuera que les parezca apropiado. En esta clase se hicieron dos ejercicios de la guía 3, correspondiente a medios materiales. Como van a ver, muchos de los argumentos y razonamientos que se ven acá, son aplicables a la guía anterior también. El ejercicios 4 lo resolvió Pablo; mientras que el ejercicio 5, Mariano. Casi todos los comentarios y resultados son los que dieron ellos en clase, pero tengan en cuenta que a los posibles errores de cuentas (que siempre los hay), se les suman los posibles errores de copiado. Ergo, les recomiendo que chequeen todo y que sean escépticos durante la lectura. Hecha esta aclaración, espero que les sea útil esto, y que tengan un viaje de puta madre.

Ejercicio 4

(a) Se pide hallar el potencial correspondiente a una carga puntual q a distancia d del origen sumergida dentro de una esfera dieléctrica de radio a y permitividad ϵ_1 que se encuentra a su vez cubierta por otro medio de permitividad ϵ_2. En la figura de abajo hay un diagrama de la situación que se nos presenta.



Como suele pasar en estos problemas, el punto de partida más recomendable es escribir las ecuaciones de los campos que intervienen en el problema en cuestión. Muchas veces la mecánica cuentística va a ser medio repetitiva, y uno podría mandarse "de memoria" a resolver el problema. De todas formas, escribir las ecuaciones es fácil, y mirarlas con cuidado una vez escritas nos suele tirar pistas de cómo encarar las cuentas.

Las ecuaciones de Maxwell son

$$
\begin{aligned}
\overline{\nabla} \times \overline{E} &= \overline{0} \\
\overline{\nabla} \cdot \overline{E} &= 4\pi\rho_T
\end{aligned} \tag{1}
$$

Como ya sabemos, la primera de estas ecuaciones me está diciendo que el campo $\overline{E}$ es conservativo, y que por lo tanto habrá un potencial ϕ tal que $\overline{E} = -\overline{\nabla}\phi$. Esto unido con la segunda de las ecuaciones, me dice que el campo cumple la ecuación de Laplace: $\nabla^2\phi = -4\pi\rho_T$.

Estas ecuaciones son, en un sentido estricto, válidas. El problema que aparece cuando uno está tratando con medios materiales, es que en estas ecuaciones aparece la carga total ρ_T, la cual es desconocida ya que incluye tanto a la densidad de carga libre ρ_L (dato) como a la de polarización ρ_P (a calcular).

Es por ello que se introducen los campos auxiliares. Definiendo al desplazamiento como $\overline{D} = \overline{E} + 4\pi\overline{P}$, como la carga de polarización viene dada por $\rho_P = -\overline{\nabla} \cdot \overline{P}$, entonces la divergencia de este campo será

$$
\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = 4\pi\rho_T - 4\pi\rho_P = 4\pi\rho_L \tag{2}
$$

Lo cual resuelve el problema anterior, pero el problema con el campo desplazamiento será que en general su rotor ($\overline{\nabla} \times \overline{D} = 4\pi\overline{\nabla} \times \overline{P}$) será no nulo. Es por ello que la forma de laburar suele ser utilizar la ecuación correspondiente a la divergencia de $\overline{D}$ junto con la del rotor de $\overline{E}$, conectando ambos campos a través de la definición de $\overline{D}$ y de cierta relación constitutiva $\overline{P}(\overline{E})$ característica del dieléctrico en cuestión.

En la guía, los dieléctricos que se nos presentan son siempre lineales, isótropos y homogéneos. Esto significa que la polarización con el campo eléctrico a través de la relación $\overline{P} = \chi\overline{E}$; o si se prefiere, el desplazamiento se relaciona con el campo eléctrico como $\overline{D} = \epsilon\overline{E}$, donde $\epsilon = (1 + 4\pi\chi)$.

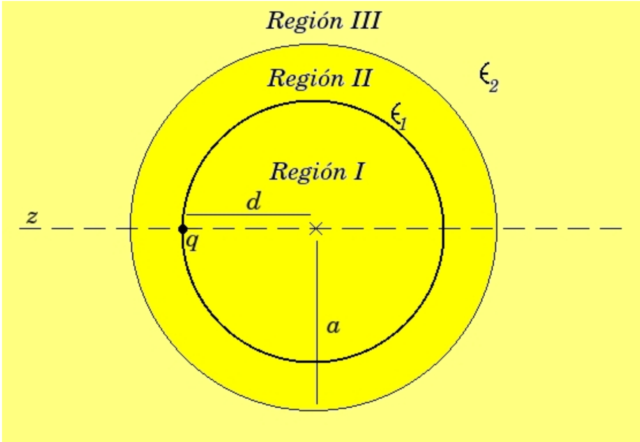
La pregunta que sigue entonces es ¿Dónde habrá cargas de polarización? Como no hay cargas libres, la ecuación de la divergencia del desplazamiento nos dice que $\overline{\nabla} \cdot \overline{D} = 0$. Y como ambos medios son lineales, en cada uno de ellos habrá una relación del estilo $\overline{D}_i = \epsilon_i\overline{E}_i$. Uniendo ambas cosas, se tiene que en volumen $\overline{\nabla} \cdot \overline{E}_i = \frac{1}{\epsilon_i}\overline{\nabla} \cdot \overline{D}_i = 0$. Esto nos dice entonces que en volumen ρ_T es nula, y que por lo tanto ρ_P también lo será. Esto solo nos deja en pie la posibilidad de que haya cargas de polarización en las superficies en donde haya discontinuidades en los medio dieléctricos. Moraleja: sólo puede haber cargas de polarización en la interfaz entre ambos medios, y rodeando a la carga q.

La carga de polarización que rodea a la carga q es particularmente fácil de encontrar. Por lo dicho antes, dentro del medio 1 se tendrá que $\overline{\nabla} \cdot \overline{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_1}\overline{\nabla} \cdot \overline{D}_1 = \frac{q}{\epsilon_1}\delta\left(\overline{r} - \overline{r}_0\right)$. Esto significa que en la posición de la carga, por efecto del dieléctrico, el campo eléctrico en vez de ver una carga q, ve una carga efectiva $\frac{q}{\epsilon_1}$. Pero como la carga que ve el campo eléctrico es la carga total $\rho_T = \rho_L + \rho_P$; y como la carga libre allí es la carga q, entonces la carga de polarización inducida alrededor de esta será $q_P = (\frac{1}{\epsilon_1} - 1)q$. Vale aclarar que el argumento de recién para hallar la carga efectiva que se ve dentro del dieléctrico es bastante general, y vale en cualquier caso que se tenga cargas flotando en medios lineales.

Las otras cargas de polarización presentes son las que se encuentran en la interfaz de ambos dieléctricos. Estas al ser cargas superficiales de polarización debidas a una discontinuidad en $\overline{P}$, vendrán dadas por $\sigma_P = \overline{P} \cdot \hat{n}$ (donde $\hat{n}$ es la normal a la superficie de discontinuidad). La polarización del medio, será obtenida conociendo el campo eleéctrico, y este será calculado derivando el potencial ϕ del problema. Con lo cual, esta densidad de carga podrá ser calculada recién cuando se haya respondido la pregunta de este inciso.

Después de hacer las aclaraciones anteriores, podemos arremangarnos y calcular el potencial del problema usando nuestro método favorito: separación de variables. Lo importante (como siempre) será plantear bien las relaciones entre los potenciales en cada una de las regiones. Una vez hecho esto, el problema se reducirá a un despeje de los coeficientes que los determinan.

Las regiones en las que se divide al problema son las siguientes.



Con lo cual, el potencial en cada una de estas regiones será

$$
\begin{aligned}
\phi_I &= \sum_l A_l r^l P_l(\cos\theta) \\
\phi_{II} &= \sum_l \left(B_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos\theta) \\
\phi_{III} &= \sum_l \frac{E_l}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Por último, las ecuaciones que determinarán las relaciones entre coeficientes serán:

- En la superficie de contacto I-II: por un lado tendremos la condición de continuidad del potencial, que nos dice que $(\phi_I(r=d) = \phi_{II}(r=d))$. Aparte de la condición de continuidad, la ecuación para la divergencia de $\overline{D}$ nos dice que sobre esta superficie $\left(\overline{D}_{II} - \overline{D}_I\right) \cdot \hat{r} = 4\pi\sigma_L$. Pero como conocemos la carga total sobre esta superficie, podemos trabajar con la relación análoga para el campo eléctrico $\left(\overline{E}_{II} - \overline{E}_I\right) \cdot \hat{r} = 4\pi\sigma_T$, o sea $(\partial_r\phi_I(r=d) - \partial_r\phi_{II}(r=d)) = \frac{q}{\epsilon_1}\delta\left(\overline{r} - \overline{r}_0\right)$. Recuerden a la hora de escribir la delta $\delta\left(\overline{r} - \overline{r}_0\right)$ en esféricas, de agregar las constantes apropiadas de forma tal que efectivamente esta integre a 1.

- En la superficie de contacto II-III: la condición de continuidad del potencial será válida también en esta superficie, con lo cual se tendrá que $(\phi_{II}(r=a) = \phi_{III}(r=a))$. La diferencia aparece a la hora de calcular el salto del potencial. Como en este caso no conocemos la carga de polarización, deberemos trabajar directamente con el campo desplazamiento. La condición de salto para este vendrá dada por $\left(\overline{D}_{III} - \overline{D}_{II}\right) \cdot \hat{r} = 4\pi\sigma_L = 0$. Que utilizando que los medios son lineales y de permitividad conocida, se traduce a $(\epsilon_1\partial_r\phi_{II}(r=a) - \epsilon_2\partial_r\phi_{III}(r=a)) = 0$.

Utilizando estas relaciones entre los potenciales en las distintas regiones, si se hacen las cuentas con cuidado, se llega a que

$$
\begin{aligned}
\phi_I &= \frac{q}{\epsilon_1}\sum\nolimits_l \left(\frac{1}{d^{l+1}} + \frac{(l+1)(\epsilon_1 - \epsilon_2)d^l}{\epsilon_2 + l(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^{2l+1}} \right) r^l P_l(\cos\theta) \\
\phi_{II} &= \frac{q}{\epsilon_1}\sum\nolimits_l \left(\frac{d^l}{r^{l+1}} + \frac{(l+1)(\epsilon_1 - \epsilon_2)d^l}{\epsilon_2 + l(\epsilon_1 + \epsilon_2)a^{2l+1}} r^l \right) P_l(\cos\theta) \\
\phi_{III} &= \frac{q}{\epsilon_1}\sum\nolimits_l \frac{d^l\epsilon_1(2l+1)}{\epsilon_2 + l(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Una vez que se obtiene la solución, es hora de chequear casos particulares pertinentes para ver si esta es razonable o no. El más fácil de estos es ver que si $q = 0$, entonces $\phi_i = 0$. Esto está bien, ya que si no hay ninguna carga libre y tenemos como condición de contorno que el potencial cae en el infinito, entonces no se inducen cargas de polarización y los dieléctricos se mueren de aburrimiento.

Otro caso de interés se tendrá cuando $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$. Aquí, ambos dieléctricos son iguales y por lo tanto se podrá pensar como que la carga se encuentra sumergida en un único dieléctrico que ocupa todo el espacio. Por lo dicho antes, el efecto del dieléctrico en este caso será el de apantallar a la carga y que el campo eléctrico vea una carga efectiva $\frac{q}{\epsilon}$. De estar bien la solución, en este caso, debería ser igual a $\frac{q}{\epsilon|\overline{r}-\overline{r}_0|}$ ¿Cumple esto la solución que conseguimos? ¿Cuál es el significado de los términos que aparecen en el potencial que son proporcionales a $(\epsilon_1 - \epsilon_2)$? Traten de responderse estas preguntas.

(b) Ahora nos piden que calculemos la densidad de carga de polarización en el espacio. Ya calculamos la carga de polarización que rodea a q, sólo nos falta ver la densidad superficial que se encuentra en la interfaz entre ambos dieléctricos. La cuenta esa, no se hizo en clase y no la voy a hacer. Está claro que la práctica está llena de vagos, pero es lo que hay.

Es una cuenta masomenos directa. Si quieren la pueden hacer ustedes. Una vez que conocen el potencial en todo el espacio, el campo eléctrico se puede calcular a partir de su gradiente. Conocido el campo eléctrico en todo el espacio, el salto en la componente normal a la interfaz nos dará la carga de polarización buscada ya que allí no hay carga libre presente. En resumen $\sigma_P = \frac{1}{4\pi}(\partial_r\phi_{III} - \partial_r\phi_{II})$. Si se mueren de intriga de cuánto da, paguen el precio y hagan la cuenta.

De lo que sí se pueden sacar conclusiones con pocas cuentas es de cuál es la carga total que hay en la interfaz. Esta carga está compuesta por dos aportes: la carga que aparece en la interfaz por la polarización del dieléctrico 1 (Q_{ϵ_1}) y la que aparece por la polarización del dieléctrico 2 (Q_{ϵ_2}).

Como el dieléctrico 1 es neutro, tendremos que la suma de las cargas de polarización inducidas dentro de él debe ser nula. Con lo cual, como ya calculamos lo que valía la carga inducida alrededor de la carga q, por lo anterior podemos decir directamente que $Q_{\epsilon_1} = (1 - \frac{1}{\epsilon_1})q$. Conocida Q_{ϵ_1}, calcular Q_{ϵ_2} saldrá utilizando argumentos símil física 3.

Si uno hace Gauss en una esfera (S) que contiene por completo al dieléctrico 1, entonces

$$\int_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = 4\pi Q_{enc} = 4\pi(Q_{\epsilon_2} + q) \tag{5}$$

Uno quizá se pregunte por qué la carga encerrada es tal que $Q_{enc} = Q_{\epsilon_2} + q$. Quiero decir: ¿A dónde se fueron las cargas inducidas sobre el dieléctrico 1? Fijense que como la superficie de integración agarra a todo el dieléctrico 1, entonces agarra tanto a las cargas inducidas alrededor de q como a las que se encuentran en la interfaz. Pero por lo que dijimos antes, ambas suman cero ya que el dieléctrico es neutro. Con lo cual en Q_{enc} aparecen ambas sumando, pero se anulan ya que son opuestas.

Por otro lado, también se tiene que

$$\int_S \overline{E} \cdot d\overline{s} = \frac{1}{\epsilon_2}\int_S \overline{D}_{III} \cdot d\overline{s} = \frac{4\pi}{\epsilon_2}Q_{libre} = \frac{4\pi q}{\epsilon_2} \tag{6}$$

Uniendo estos últimos dos resultados, se llega a que $Q_{\epsilon_2} = (\frac{1}{\epsilon_2} - 1)q$.

(c) Este punto pide repetir todo, pero ahora con la carga q fuera del dieléctrico 1. Fiaca. No se hizo en clase tampoco. Háganlo ustedes si quieren.

EXTRA: en clase, luego de resolver el ejercicio como lo hicimos más arriba, Pablo comentó una forma alternativa para obtener ϕ.

El razonamiento es masomenos el siguiente. Nos podemos ahorrar dividir en tres regiones al potencial, si "agregamos a mano" una parte. Nosotros sabemos que en el interior del primer dieléctrico, el potencial tiene que cumplir que

$$\nabla^2 \phi = \frac{4\pi}{\epsilon_1} \rho_L = \frac{4\pi}{\epsilon_1} q \delta \left(\overline{r} - \overline{r}_0 \right) \tag{7}$$

Si no hubiera otro dieléctrico, la solución de esta ecuación nos daría el potencial de una carga puntual en esféricas (ϕ_q). Como uno ya conoce ϕ_q, lo puede meter de prepo y decir que el potencial en todo el espacio será

$$\begin{aligned} \phi_I &= \phi_q + \sum_l A_l r^l P_l \\ \phi_{II} &= \sum_l B_l \tfrac{1}{r^{l+1}} P_l \end{aligned} \tag{8}$$

En donde el subíndice I ahora denota el interior del dieléctrico 1, y el subíndice II denota el interior del dieléctrico 2. Si aplicando las condiciones de contorno apropiadas en la interfaz de contacto de los dos dieléctricos encuentro un conjunto de coeficientes $\{A_l; B_l\}$ que las cumplen, entonces automáticamente tengo una solución del problema completo y me ahorré de dividir en tres regiones y manejar cuatro conjuntos de coeficientes.

¿Es solución el potencial obtenido de esta manera? Fijense que este potencial por como lo construimos cumple que en el interior del dieléctrico 1, $\nabla^2 \phi_I = \frac{4\pi}{\epsilon_1} q \delta \left(\overline{r} - \overline{r}_0 \right)$; y en el dieléctrico 2 que $\nabla^2 \phi_{II} = 0$. O sea que es solución de las ecuaciones diferenciales del problema. Y además, por como encontramos $\{A_l; B_l\}$, cumple también las condiciones de contorno apropiadas. Con lo cual, no le queda otra que ser la solución del problema.

Pueden pensar como que lo que están haciendo al proponer que $\phi_I = \phi_q + \sum_l A_l r^l P_l$ es decir que ϕ_I es la suma de una solución homogénea ($\phi_H = \sum_l A_l r^l P_l$) más una solución particular ($\phi_P = \phi_q$).

Para el que tengan ganas, les propongo el siguiente ejercicio: encuentren (utilizando estas ideas) la solución de un dipolo puntual ($\overline{p} = p_0 \hat{z}$) ubicado en el centro de una esfera dieléctrica de permitividad ϵ y radio a, inmersa en el vacío. En este caso, es particularmente conveniente hacer las cuentas de esta manera.