Cuasiestacionario en conductores

En la clase del lunes 28 de octubre discutimos cómo encontrar el campo electromagnético y la densidad de corriente dentro de un conductor por el cual circula una corriente $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$ (ejercicio 10 de la guía de cuasiestacionario).

Resolvimos el problema de manera directa, sin hacer un desarrollo perturbativo en potencias de la frecuencia de exitación y quedó pendiente comparar el resultado directo con el cuasiestacionario. Aquí va un intento de saldar dicha deuda.

Resolución directa

La aproximación cuasiestacionaria se pone de manifiesto cuando se despercia el término de la corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampere. La justificación es que la frecuencia de exitación es lo suficientemente baja como para que el tiempo de conducción de los electrones en el conductor sea despreciable frente a la corriente externa: $\tau = \frac{2\pi}{\omega} \gg \tau_{cond}$.

Bajo esta aproximación las ecuaciones que involucran a los rotores de los campos son (con $\mu = \epsilon = 1$):

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{C}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{C}\vec{J} \tag{2}$$

Además, tenemos la relación constitutiva del medio conductor: $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, donde σ es la constante de conductividad.

Nota al pasar: como $\vec{J}$ es el rotor de un campo tiene entonces divergencia nula, por lo tanto $\partial_t \rho = -\nabla \vec{J} = 0$. Si el conductor inicialmente estaba descargado lo estará para todo tiempo. Conclusión importante: no hay distribución de cargas en volumen y entonces $\nabla \vec{E} = 0$.

La manera directa para hallar los campos dentro del conductor es operando con las dos ecuaciones de Maxwell. Tomando el rotor en (1) se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \vec{E}) &= -\frac{1}{c}\partial_t(\nabla \times \vec{B}) \\ -\nabla^2 \vec{E} + \nabla \cdot (\nabla \vec{E}) &= -\frac{1}{c}\partial_t\left(\frac{4\pi}{c}\sigma \vec{E}\right) \\ \nabla^2 \vec{E} &= \frac{4\pi}{c^2}\sigma \partial_t \vec{E} \end{aligned} \tag{3}$$

Hasta aquí solo usamos que dentro del conductor la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico y que bajo la aproximación cuasiestacionaria podemos despreciar la corriente de desplazamiento.

Ahora vamos a discutir cómo deben ser los campos dentro del conductor. Tenemos una corriente que fluye por el cilindro, de la cual no sabemos como es la distribución en el interior, pero sí sabemos que está orientada en la dirección paralela al eje del cable, entonces $\vec{J} = J(\vec{r})\hat{z}$, y como $\vec{J}$ y $\vec{E}$ son proporcionales, el campo eléctrico también está en la dirección $\hat{z}$. Como el campo magnético es proporcional al rotor del campo $\vec{E}$, resulta que $\vec{B} = B(\vec{r})\hat{\theta}$. Consistentemente, el rotor del campo magnético da un campo en $\hat{z}$, lo que se condice con (2).
Respecto a la dependencia temporal, siempre podemos proponer que $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})e^{-\imath\omega t}$ (porque siempre podemos hacer Fourier (porque las ecuaciones de Maxwell son lineales)). Con esta propuesta la derivada temporal se cambia por un factor $-\imath\omega$. La ecuación (3) queda entonces:

$$\nabla^2 \vec{E} = -4\pi\imath\frac{\omega\sigma}{c^2}\vec{E} \tag{4}$$

Operando adecuadamente en coordenadas cilíndricas, la ecuación para la amplitud del campo eléctrico es

$$\frac{\partial^2 E}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E}{\partial r} + k^2 E = 0, \quad k^2 = 4\pi\imath\frac{\omega\sigma}{c^2} \tag{5}$$

Ya sabemos, ecuación de Bessel de orden cero, por lo tanto: $E(\vec{r}) = E_0 J_0(kr)$. Tiramos la solución que depende de $N_0(kr)$ porque diverge en el origen.

Listo, encontramos el campo eléctrico resolviendo directamente la ecuación diferencial. Vamos a ver ahora cómo encaramos el problema haciendo una expansión en serie de potencias en la frecuencia.

Desarrollo perturbativo

La ecuación a resolver sigue siendo (3), pero la estrategia es otra. Vamos a proponer para campo eléctrico la siguiente forma:

$$\vec{E} = \vec{E}e^{\imath\omega t} = \vec{E}^{(0)} + \omega\vec{E}^{(1)} + \omega^2\vec{E}^{(2)} \cdots \tag{6}$$

Todos los factores numéricos, potencias de $\imath$, etc, están cargados en los $\vec{E}^{(n)}$. La derivada temporal sigue dando un factor $\imath\omega$. Cuando reescribimos (3) con el desarrollo en potencias nos queda:

$$\nabla^2\left[\vec{E}^{(0)} + \omega\vec{E}^{(1)} + \omega^2\vec{E}^{(2)} + \cdots\right] = 4\pi\imath\frac{\sigma}{c^2}\omega\left[\vec{E}^{(0)} + \omega\vec{E}^{(1)} + \omega^2\vec{E}^{(2)} + \cdots\right] \tag{7}$$

Ahora hay que resolver de manera consistente, igualando orden a orden en potencias de ω. Como la derivada temporal aporta un ω, los campos del lado derecho de la última ecuación aumentan un orden en la frecuencia. Entonces, orden a orden tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}(0): &\quad \nabla^2\vec{E}^{(0)} = 0\\
\mathcal{O}(1): &\quad \nabla^2\vec{E}^{(1)} = 4\pi\imath\frac{\sigma}{c^2}\vec{E}^{(0)}\\
\mathcal{O}(2): &\quad \nabla^2\vec{E}^{(2)} = 4\pi\imath\frac{\sigma}{c^2}\vec{E}^{(1)}
\end{aligned}$$

y el esquema se repite: el laplaciano del campo de orden $n+1$ resulta porporcional al campo de orden n.

Lo que resta es ver que haciendo una expansión en potencias de ω de la $J_0(kr)$ (ω está dentro de k), se verifican las últimas ecuaciones que escribimos.