Problema de la espira por cuasi-estacionario

Problema

Se tiene una espira circular de radio a, resistencia R, y coeficiente L de auto-inducción, perpendicular a un campo magnético uniforme. Si el campo se apaga exponencialmente, es decir, si

$$B(t) = B_0 \, e^{-t/\tau} \tag{1}$$

donde τ es una constante de tiempo, calcular la corriente $I(t)$ inducida en la espira (se desprecia el efecto del campo magnético de la espira sobre las fuentes del campo exterior).

Solución por aproximación cuasi-estática

El sistema parte de una situación magnetostática en la que sólo aparece un campo $B_0 \, \hat{z}$ uniforme en todo el espacio. En $t = 0$ el campo comienza a decaer con un tiempo de relajación τ. Las ecuaciones de la electro-dinámica para $t > 0$ son

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \, \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{2}$$

Aparece un campo eléctrico $\mathbf{E}$ debido a la variación temporal de $\mathbf{B}$ (ecuación de Faraday) y éste, a su vez, induce un cambio en $\mathbf{B}$ según la ecuación de Ampère. La densidad de corriente $\mathbf{J}$ que figura en la ecuación de Ampère es la corriente inducida en la espira. Como el enunciado dice que la espira presenta una resistencia, podemos asumir una ecuación constitutiva $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ para la espira (ley de Ohm para un conductor real).

Si la variación del campo magnético (externo) $B(t)$ es lenta, podemos suponer que el campo eléctrico será capaz de seguir las variaciones del campo magnético. Como $\mathbf{B}$ se apaga exponencialmente, en una aproximación cuasi-estática, podremos suponer que $\mathbf{E}$ también decaerá exponencialmente (y, por supuesto, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$).

Las variación en los campos viene dada por la derivada temporal de una función exponencial, y por lo tanto dependerá del tiempo de relajación τ. Esto motiva a considerar como parámetro perturbativo la magnitud adimensional $\ell / c\tau$, donde ℓ es una longitud característica del sistema (aún desconocida) y c es la velocida de la luz. Este parámetro perturbativo es el responsable de los cambios en las componentes espaciales de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$, aunque no de la variación temporal, ya que estamos suponiendo que ésta sigue un comportamiento exponencial. Es decir que en la aproximación cuasi-estática, los campos pueden expresarse como

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{E} \, e^{-t/\tau} & = & \left[\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \left(\dfrac{\ell}{c\tau} \right) + \mathbf{E}_2 \left(\dfrac{\ell}{c\tau} \right)^2 + \ldots \right] e^{-t/\tau} \\ \\ \mathbf{B} \, e^{-t/\tau} & = & \left[\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \left(\dfrac{\ell}{c\tau} \right) + \mathbf{B}_2 \left(\dfrac{\ell}{c\tau} \right)^2 + \ldots \right] e^{-t/\tau} \end{array} \right. \tag{3}$$

donde $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{B}_0$ son los campos estáticos (nulo para el campo eléctrico). En adelante sólo tomamos en cuenta la parte espacial de la solución, ya que la parte temporal es una exponencial decreciente. Para que esta aproximación cuasi-estática sea válida, debemos pedir que

$$\frac{\ell}{c\tau} \ll 1 \quad , \quad \tau \gg \frac{\ell}{c} \tag{4}$$

Esta condición lleva a que los términos de orden superior sean despreciables. Podremos tomar en cuenta sólo los términos de orden más bajo, pero siempre asegurando un número suficiente que permita observar los fenómenos físicos de interés. En este caso, el "orden cero" corresponde a la situación estática en la que $\nabla \times \mathbf{B}_0 = 0$ y $\mathbf{E}_0 = 0$. Para los siguientes ordenes, podemos observar a partir de (2) que luego de derivar resulta

$$\nabla \times \mathbf{E} = \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{\mathbf{B}}{\ell} \quad , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\, \sigma \mathbf{E} - \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{\mathbf{E}}{\ell} \tag{5}$$

(sólo estamos escribiendo la parte espacial de los campos!).

En la ecuación de Faraday (expresión de la izquierda), el primer orden fuera de la situación estática es el debido a $\mathbf{B}_1$. Ésta es la primera perturbación no estática en el campo magnético, pero debido a que está multiplicada por $\ell/c\tau$, produce efectos sobre el segundo orden del campo eléctrico $\mathbf{E}_2$. Si no tomamos en cuenta hasta el segundo orden del campo eléctrico, estaríamos ignorando el campo magnético no-estático. Por lo tanto, los órdenes más bajos que vamos a considerar, sin perder los primeros efectos de la inducción son

$$\nabla \times \left[\mathbf{E}_1 \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) + \mathbf{E}_2 \left(\frac{\ell}{c\tau}\right)^2\right] = \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{\mathbf{B}_0}{\ell} + \left(\frac{\ell}{c\tau}\right)^2 \frac{\mathbf{B}_1}{\ell} \simeq \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{\mathbf{B}_0}{\ell} \tag{6}$$

La última aproximación es válida debido a la condición (4). Pero además es útil porque simplifica los cálculos, y fue sugerida en el enunciado del problema cuando se pide que "desprecie el efecto del campo magnético de la espira sobre las fuentes del campo exterior".

Aplicando el teorema de Stokes y simplificando factores, la ec. (6) se escribe como

$$\oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} + \oint \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \simeq \int_S \frac{\mathbf{B}_0}{\ell} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\ell}\, \pi a^2\, B_0 \tag{7}$$

Ahora debemos relacionar los campos $\mathbf{E}_1$ y $\mathbf{E}_2$ con la corriente del lazo, que es la magnitud pedida en el enunciado. Si observamos la ecuación de Ampère en (5), advertimos que únicamente el campo $\mathbf{E}_1$ produce efectos sobre $\mathbf{B}_1$. Entonces, la única fuente de inducción (en este orden de aproximación) es $\mathbf{J}_1 = \sigma \mathbf{E}_1$. La corriente en alguna sección del anillo será

$$I = \int_{\mathcal{A}} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{A}} \sigma \mathbf{E}_1 \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) d\mathbf{S} = E_1 \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \int_{\mathcal{A}} \sigma \, dS \tag{8}$$

donde se incluye un factor $\ell/c\tau$ debido a que $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, y $\mathbf{E}$ difiere de $\mathbf{E}_1$ en ese factor, según las relaciones en (3).

La corriente I es la misma para cualquier sección transversal del anillo $\mathcal{A}$ que se considere. Esto es consecuencia de la aproximación cuasi-estática, dado que la corriente depende de $\mathbf{E}_1$, y éste a su vez, es uniforme de acuerdo con la ec. (5). Esto significa que no puede haber puntos de acumulación de carga dentro del anillo (para este orden de aproximación). Cualquier efecto capacitivo queda descartado. En cambio, la resistencia R del anillo valdrá

$$I = E_1\left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \int_A \sigma\, dS = 2\pi a\, E_1\left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{\sigma\mathcal{A}}{2\pi a} = \left(\frac{\ell}{c\tau}\right) \frac{1}{R} \oint \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{l} \tag{9}$$

Si observamos nuevamente la ecuación de Faraday (5) vemos que sólo $\mathbf{B}_1$ puede producir efectos a segundo orden $\mathbf{E}_2$. Por lo tanto, aplicando el teorema de Stokes a la ec. (5) sobre una superficie limitada por el anillo, resulta

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{B}_1}{\ell} \qquad \Rightarrow \qquad \oint \mathbf{E}_2 \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{\ell}\int_S \mathbf{B}_1 \cdot d\mathbf{S} \tag{10}$$

El campo $\mathbf{B}_1$ puede hallarse por medio de la ley de Biot-Savart. Sin embargo, resulta complicado llegar a una solución explícita (la solución viene expresada en función de integrales elípticas). Por eso, se define un coeficiente L de auto-inducción del siguiente modo

$$\oint \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{L}{c^2}\frac{di}{dt} \tag{11}$$

El coeficiente L depende exclusivamente de la geometría del sistema. El factor c^2 se debe a que estamos trabajando en unidades gaussianas. $i(t)$ es la corriente de inducción.

El campo $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ que debemos usar en la relación (11) es aquel debido a la auto-inducción. Pero, en la aproximación cuasi-estática (5) vemos que los efectos inductivos debidos a la corrección $\mathbf{B}_1$ del campo magnéticos, producen correcciones de segundo orden $\mathbf{E}_2$ en el campo eléctrico (la *fuerza electromotriz* debida a la auto-inducción es una corrección de segundo orden). Por lo tanto, la aplicación de la relación (11) a este problema particular resulta

$$\oint \left[\mathbf{E}_2\left(\frac{\ell}{c\tau}\right)^2\right] e^{-t/\tau} \cdot d\mathbf{l} = \frac{L}{c^2}\frac{di}{dt} \tag{12}$$

donde se usó la correción de segundo orden detallada en (3).

La corriente $i(t)$ está sujeta a la aproximación cuasi-estática. Esto significa que es capaz de seguir el decaemineto lento del campo magnético y, por lo tanto, sigue la misma exponcial decreciente que el campo $B(t)$. La parte espacial I de la corriente es la misma que en (8), aunque ahora no estamos interesados en relacionarla con el campo eléctrico a primer orden. Simplemente, re-aprovechamos el argumento dado en (8) que aseguraba que I es constante a lo largo del anillo (debido a la aproximación cuasi-estática). Eliminando la parte temporal de la ec.(12) resulta

$$\oint \left[\mathbf{E}_2\left(\frac{\ell}{c\tau}\right)^2\right] \cdot d\mathbf{l} = -\frac{L}{c^2\tau}\, I \tag{13}$$

Reemplazando las relaciones (9) y (13) en la expresión (7) resulta

$$c\tau\, RI - \frac{L}{c}\, I = \pi a^2 B_0 \qquad \Rightarrow \qquad I = \frac{c}{R} \cdot \frac{\pi a^2 B_0}{c^2\tau - L/R} \tag{14}$$

y la corriente total es $i(t) = \frac{c}{R} \cdot \frac{\pi a^2 B_0\, e^{-t/\tau}}{c^2\tau - L/R}$

Verificación por medio de la teoría de circuitos

La teoría de circuitos es una aproximación cuasi-estática. Esta aproximación viene dada por la primera ley de Kirkoff, que señala que la corriente es uniforme en todo el lazo. Para que ello ocurra, debemos pedir que la longitud de onda λ de la corriente sea mucho mayor que la longitud del lazo ($\lambda \gg a$). Como $\lambda f = c$, las frecuencias posibles de la señal no podrán exceder un cierto límite. La señal excitadora es una exponencial decreciente con tiempo de relajación τ. En un desarrollo de Fourier se observa que las componentes en frecuencia de este tipo de señal dejan de tener relevancia más allá de $f = 2/\tau$ (aproximadamente). Por lo tanto

$$\lambda \gg a \qquad \Rightarrow \qquad \tau \gg \frac{a}{c} \tag{15}$$

Comparando con las relaciones (4) podemos identificar la longitud característica con $\ell = a$. Bajo esta condición, es posible recorrer el lazo (anillo) y escribir la ecuación circuital

$$R\, i + \frac{L}{c^2}\frac{di}{dt} = \mathcal{E} = -\frac{\pi a^2}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\pi a^2}{c\tau}\, B_0 e^{-t/\tau} \tag{16}$$

que es equivalente a la ec. (7). La *fuerza electromotriz* es la debida al campo externo, según se comentó en la ec. (7). El factor c^2 en el coeficiente de auto-inductancia se debe a que estamos trabajando en unidades gaussianas. Podemos resolver directamente esta ecuación diferencial, o bien usando un factor integrante, o bien por separación, o bien usando la transformación de Fourier. Seguimos el método del factor integrante

$$\frac{di}{dt}\, e^{c^2 Rt/L} + i\,\frac{c^2 R}{L}\, e^{c^2 Rt/L} = \frac{c\pi a^2}{L\tau}\, B_0 e^{-t/\tau}\, e^{c^2 Rt/L} \tag{17}$$

agrupando la derivada del producto

$$\frac{d}{dt}\left(i\, e^{c^2 Rt/L}\right) = \frac{c\pi a^2}{L\tau}\, B_0 e^{-t/\tau}\, e^{c^2 Rt/L} \qquad \Rightarrow \qquad i(t) = \frac{c\pi a^2}{L\tau\left(\frac{c^2 R}{L} - \frac{1}{\tau}\right)}\, B_0 e^{-t/\tau} + C_0 \tag{18}$$

y finalmente resulta

$$i(t) = \frac{c\pi a^2}{L\tau\left(\frac{c^2 R}{L} - \frac{1}{\tau}\right)}\, B_0 e^{-t/\tau} + C_0 = \frac{c}{R} \cdot \frac{\pi a^2\, B_0 e^{-t/\tau}}{c^2\tau - L/R} \tag{19}$$

donde $C_0 = 0$ porque $i(\infty) = 0$ ya que desaparece la excitación en $t = \infty$.