

FÍSICA TEÓRICA 1 - Relatividad

■ **Problema 1.** (Aberración relativista.) Una fuente de luz que está en reposo en el sistema S' emite, según las observaciones hechas en este sistema, luz de frecuencia ω' en todas direcciones. La misma fuente es observada desde un sistema S , respecto del cual la fuente se mueve con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{z}$.

a) A partir de la transformación del cuadrivector número de onda k'^{μ} , encuentre la dirección de propagación en S de la luz que en S' se propaga en la dirección dada por los ángulos φ' y θ' . Encuentre las relaciones entre las siguientes funciones en los dos sistemas: $\sin \theta$, $\cos \theta$ y $\tan \theta/2$.

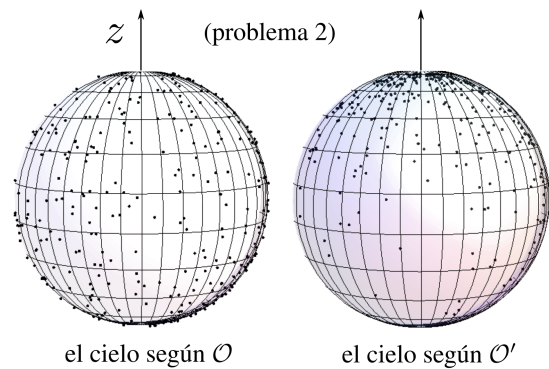
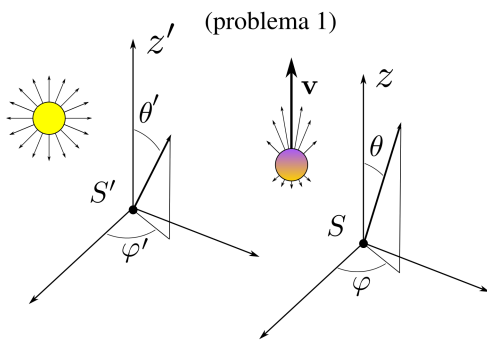
b) Halle la relación entre los ángulos de propagación en los dos sistemas, pero esta vez a partir de las fórmulas de transformación de velocidades para una partícula que se mueve a velocidad c .

c) La luz que en S' se emite según una cierta dirección y dentro de un ángulo sólido $d\Omega' = \sin \theta' d\varphi' d\theta'$ se propaga en S dentro de un ángulo $d\Omega$. Encuentre la relación entre $d\Omega'$ y $d\Omega$.

d) A partir de las fórmulas de transformación de k^{μ} , encuentre la frecuencia $\omega(\varphi, \theta)$ de la luz que se propaga, según el sistema S , en la dirección determinada por los ángulos φ y θ .

e) Encuentre nuevamente la relación entre las frecuencias en uno y otro sistema en función de la dirección de observación en S , pero esta vez de manera geométrica, analizando la emisión de frentes de onda en el sistema S y teniendo en cuenta la dilatación temporal.

f) La distancia de la fuente al origen de S es mínima en $t = 0$, cuando toma el valor d . Grafique cualitativamente la frecuencia $\omega_0(t)$ que registra un observador en el origen de S como función del tiempo. Indique con precisión los valores asintóticos de ω_0 cuando $t \rightarrow \pm\infty$, el instante de tiempo en que la luz llega al origen perpendicular al eje z y con qué frecuencia lo hace (Doppler transverso).



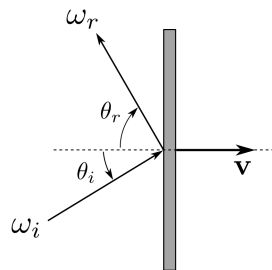
■ **Problema 3.** Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad v paralela a su normal incide luz de frecuencia ω_i con un ángulo de incidencia θ_i , como muestra la figura.

a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso $v \ll c$ y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.

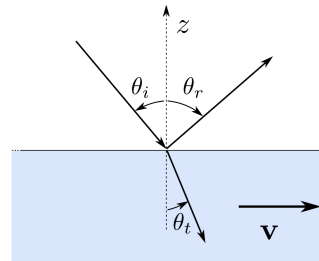
b) Para ángulos de incidencia distintos de cero, el espejo puede moverse con velocidad mayor que la velocidad con que los frentes de onda se acercan a él. ¿Cómo se interpretan las fórmulas del ítem (a)?

c) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando $v \ll c$ y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo de partículas o de sonido contra una pared en movimiento.

■ **Problema 4.** (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia ω y amplitud E , incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción n y $\mu = 1$. El líquido ocupa el semiespacio $z < 0$ y se mueve con velocidad v paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster para líquidos en reposo?



(problema 3)



(problema 4)

Problema 5. (Experimento de Fizeau.) Un líquido transparente, que tiene índice de refracción n , real e independiente de la frecuencia, se mueve respecto al laboratorio con velocidad $\mathbf{v} = v\hat{x}$. Ondas electromagnéticas planas pueden propagarse dentro del líquido en la dirección \hat{x} , tanto a favor como en contra de la corriente.

a) Encontrar la relación entre k y ω en el sistema de laboratorio para las ondas que se propagan en el líquido, distinguiendo los casos en que las ondas viajan a favor y en contra de la corriente.

b) A partir de la relación anterior, calcule la velocidad de propagación de las ondas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible que la luz no logre remontar la corriente en el sistema de laboratorio?

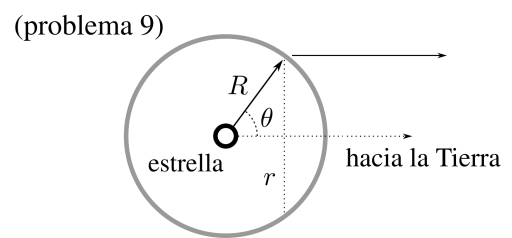
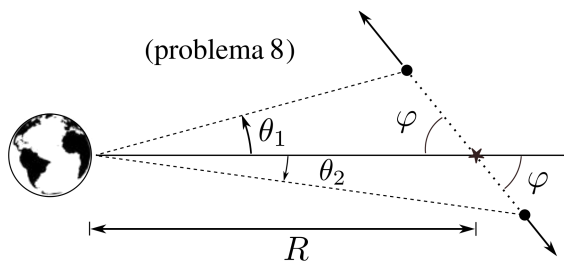
c) Demuestre que, a primer orden en v , la velocidad de las ondas en el sistema de laboratorio es

$$u = \frac{c}{n} \pm v \left(1 - \frac{1}{n^2} \right).$$

d) Suponga que el índice de refracción n depende de ω . ¿Cómo se modifica, siempre a primer orden en v , el resultado del ítem anterior?

■ **Problema 8.** (Velocidades superlumínicas I: *jets*.) Desde un mismo punto en el cielo, a una distancia R de varios miles de años luz de la Tierra, se ven partir dos objetos en direcciones opuestas. Desde la Tierra, lo que se puede medir directamente son sus velocidades angulares **aparentes** en el cielo, $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ y $\omega_2 = \dot{\theta}_2$. La figura muestra lo que se ve desde la Tierra en un dado instante, aunque el ángulo φ es, en principio, desconocido. Los ángulos θ_i son del orden del segundo de arco. Suponiendo que los dos objetos se mueven con la misma velocidad v :

- Encuentre ω_1 y ω_2 en función de R , φ y v , y a partir de ahí despeje v y φ en función de las cantidades medibles, ω_1 , ω_2 y R .
- ¿Bajo qué condiciones es la velocidad transversal aparente de alguno de los objetos mayor que c ?
- En la práctica, R no se conoce con precisión, pero puede obtenerse otra ecuación que evite la necesidad de conocer R para calcular v . Suponga que la misma línea de emisión, de frecuencia propia ν_0 , puede identificarse en los dos objetos. Debido al efecto Doppler, la línea tendrá frecuencias ν_1 y ν_2 , según cuál objeto se observe. Halle v en función de ν_0 , ν_1 y ν_2 .



■ **Problema 9.** Un sistema inercial S' se mueve con velocidad \mathbf{v} respecto de un sistema S . Puede asumirse que los ejes de los dos sistemas coinciden en $t' = t = 0$.

- Si en S hay un campo tensorial $A^{\mu\nu\dots}(t, \mathbf{r})$, encuentre el campo $A^{\mu\nu\dots}(t', \mathbf{r}')$ según el sistema S' .
- Si en S se miden los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(t, \mathbf{r})$, encuentre los campos $\mathbf{E}'(t', \mathbf{r}')$ y $\mathbf{B}'(t', \mathbf{r}')$ en S' .
- Si en S se propaga una onda plana caracterizada por los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ y $\mathbf{B} = \hat{k} \times \mathbf{E}$, demuestre que en S' también se propaga una onda plana y encuéntrela explícitamente.