Aproximación cuasi-estacionaria en un cable

Por un conductor macizo de radio a, que puede considerarse de longitud infinita, circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. Bajo la aproximación cuasi-estacionaria, calcule ($\mu = 1$, $\epsilon = 1$) los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

Solución

Consideramos que por el conductor circula una corriente $I = I_0\, e^{-i\omega t}$ (en notación compleja). La distribución espacial de esa corriente dentro del conductor es desconocida. Sin embargo, suponemos que la ecuación constitutiva para un conductor es $\mathbf{J} = \sigma\, \mathbf{E}$ (ley de Ohm), donde σ es la conductividad del material.

Si se asume que el medio es lineal, los campos oscilarán armónicamente como $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r)\, e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r)\, e^{-i\omega t}$. Además, si la frecuencia es baja, la conductividad $\sigma(\omega)$ puede considerarse constante $\sigma \simeq \sigma(0)$. Las ecuaciones de Maxwell para el rotor de $\mathbf{E}(r)$ y $\mathbf{B}(r)$ son

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \nabla \times \mathbf{E} & = & \dfrac{i\omega}{c}\mathbf{B} \\[2ex] \nabla \times \mathbf{B} & = & \dfrac{4\pi\sigma}{c}\,\mathbf{E} - \dfrac{i\omega}{c}\,\mathbf{E} \end{array} \right. \tag{1}$$

Si se aplica el rotor a ambos miembros de la segunda ecuación y se tiene en cuenta que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, entonces $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2\mathbf{B}$. Haciendo las sustituciones para $\nabla \times \mathbf{E}$ se cumple que

$$-\nabla^2\mathbf{B} = i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\mathbf{B} + \frac{\omega^2}{c^2}\,\mathbf{B} \tag{2}$$

En la aproximación cuasi-estacionario (baja frecuencia) se puede hacer una expansión en potencias de ω, $\mathbf{B}(r) = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} + ...$ El término $\omega^2\, \mathbf{B}/c^2$ siempre corresponde a un orden superior de la expansión respecto de $4\pi\sigma\omega\mathbf{B}/c^2$, y puede eliminarse. La aproximación al orden más bajo posible (no estático) es,

$$\nabla^2(\mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)}) \simeq \nabla^2\mathbf{B}^{(0)} = -i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}\mathbf{B}^{(0)} \tag{3}$$

La simetría del problema permite escribir $\mathbf{B}^{(0)} = B(r)\,\hat{\varphi}$. Su laplaciano vectorial es

$$(\nabla^2\mathbf{B})_\varphi = \nabla^2 B(r) - \frac{B(r)}{r^2} = \frac{d^2B(r)}{dr^2} + \frac{dB(r)}{dr}\frac{1}{r} - \frac{B(r)}{r^2} \tag{4}$$

La ec. (3) para el orden más bajo posible es una ecuación de Bessel

$$\frac{d^2B(r)}{dr^2} + \frac{dB(r)}{dr}\frac{1}{r} - \left(k^2 + \frac{1}{r^2}\right) B(r) = 0 \qquad , \qquad k^2 = -\,i\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2} \tag{5}$$

cuya solución es $B(r) = B_0\, J_1(kr)$. La función de Neuman $N_1(kr)$ se elimina porque diverge en $kr = 0$. El valor de k es

$$k = \frac{1-i}{\delta} \qquad , \qquad \delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\sigma\omega}} \tag{6}$$

donde δ es una longitud característica llamada "longitud de penetración". El campo $\mathbf{E}^{(1)} = E(r)\,\hat{z}$ se puede hallar a partir de $\nabla \times \mathbf{E}^{(1)} = i\omega\mathbf{B}^{(0)}/c$. Como $J_0'(x) = -J_1(x)$ se obtiene que

$$E(r) = \frac{i\omega}{ck} B_0\, J_0(kr) \tag{7}$$

La constante B_0 se determina por la condición de que la corriente total que circula en el cable es $I_0 = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s}$ (s es la sección transversal del cable). También podría usarse la ley de Ampére (despreciando la corriente de desplazamiento). Entonces, se obtiene

$$B_0 = \frac{2I_0}{ca}\,\frac{1}{J_1(ka)} \tag{8}$$

Es posible usar el mismo procedimiento, pero empezando por hallar $\mathbf{E}$ a partir de la ecuación de Faraday.

Validez de la aproximación

La solución hallada se apoya en el supuesto de que la frecuencia es baja ($\sigma \simeq \sigma(0)$) y que $\mathbf{B}^{(1)}$ es despreciable frente a $\mathbf{B}^{(0)}$. Eso significa (según la expansión en potencias) que debe cumplirse que $\omega\ell/c \ll 1$ (ℓ es una longitud característica vinculada a δ). Pero comparando la ec. (3) con la ec. (2) se ve también que

$$\frac{\omega^2}{c^2}.\frac{c^2}{4\pi\sigma\omega} \ll 1 \tag{9}$$

Esto permite identificar $\ell = c/\sqrt{4\pi\sigma\omega} = \delta/\sqrt{2}$. La validez de la aproximación dependerá de la longitud de penetración δ, y ésta a su vez, del producto $\sigma\omega$. Para bajas frecuencias, σ debe ser alta. El medio tiene que ser entonces un buen conductor. La aproximación cuasi-estacionaria se corresponde con la de buen conductor.