

(a) Resuelvo en primer lugar usando el formalismo de distribuciones que se aprende en FT1 (ie: Pensamos siempre en distribuciones volumétricas).

FUENTES DEL ROTOR DE  $\vec{H}$ : Las únicas fuentes posibles de  $\text{rot } \vec{H}$  son las corrientes libres. Pero en este problema no hay así que:  $\vec{J}_L \equiv 0$ .

FUENTES DEL ROTOR DE  $\vec{B}$ : De  $\text{rot } \vec{B}$  son fuentes tanto las corrientes libres (que no hay) como las corrientes de magnetización  $\vec{J}_M = c \vec{\nabla} \times \vec{M}$ . Para calcular estas últimas es necesario escribir  $\vec{M}$  como distribución volumétrica. Observar que el campo  $\vec{M}$  no es solo la magnetización del imán sino que también describe la magnetización en el medio lih que ocupa la región  $r < a$ . Es decir:

$$\vec{M} = \vec{M}_{\text{Imán}} + \vec{M}_{\text{lih}}$$

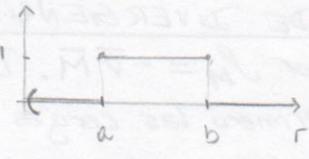
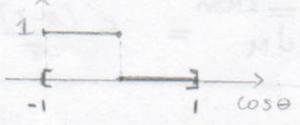
donde:  $\vec{M}_{\text{Imán}} = M_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \theta(\cos\theta) \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{r}$   
 Es la magnetización del imán, y:

$$\vec{M}_{\text{lih}} = \frac{(\vec{B} - \vec{H})}{4\pi} = \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \vec{H} \theta(a-r)$$

$\vec{B} = \mu \vec{H}$   
 si  $r < a$

O bien, notando que  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  si  $r < a$ ,

$$\vec{M}_{\text{lih}} = \frac{(\mu-1)}{4\pi\mu} \vec{B} \theta(a-r)$$



Obs: La magnetización del imán podría bien escribirse así:

$$\vec{M}_{\text{Imán}} = M_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \theta\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{r}$$

Pero es más cómodo expresar siempre la información en términos de la verdadera variable del problema que es  $\cos\theta$  y no  $\theta$  a secas.

Además, en esta última expresión no hace falta agregar " $\theta(\theta)$ " para expresar que la distribución vive en  $\theta > 0$  pues la variable  $\theta$  ya está acotada al intervalo  $[0, \pi]$ . fin obs.

Calculemos entonces las corrientes de magnetización:

Empecemos primero con la corriente de magnetización que aporta el medio lih:

$$\begin{aligned} \vec{J}_M^{(\text{lih})} &= c \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\text{lih}} = c \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \vec{\nabla} \times (\vec{H} \theta(a-r)) = c \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \left[ \theta(a-r) \vec{\nabla} \times \vec{H} + \vec{\nabla}(\theta(a-r)) \times \vec{H} \right] \\ &= c \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \left[ \theta(a-r) \frac{4\pi}{c} \vec{J}_L + \partial_r(\theta(a-r)) \hat{r} \times \vec{H} \right] = -c \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \delta(a-r) \hat{r} \times \vec{H} \\ &= c \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \vec{H} \times \hat{r} \delta(a-r) \end{aligned}$$

Observar que  $\vec{J}_M^{(\text{lih})}$  es algo desconocido ya que depende de  $\vec{H}$  y  $\vec{H}$  no lo conocemos hasta resolver el problema. Sin embargo  $\vec{J}_M$  no es un enigma total. EL hecho de que el medio sea lih nos permite llegar a la conclusión de que  $\vec{J}_M^{(\text{lih})}$  está totalmente concentrada en la superficie  $r = a$  (como lo expresa la delta de dirac en la última expresión).

Pasemos a calcular la corriente de magnetización que aporta el imán:

$$\vec{J}_M^{\text{Imán}} = c \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\text{Imán}} = c \vec{\nabla} \times \left( M_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \theta(\cos\theta) \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{r} \right)$$

Ver Fórmula ROT esféricas  $\vec{J} = -\frac{c}{r} \partial_\theta \left( M_0 \frac{\cos\theta}{r^2} \theta(\cos\theta) \theta(b-r) \theta(r-a) \right) \hat{\phi}$

$$\begin{aligned} \vec{J}_M^{iman} &= -\frac{c}{r^3} M_0 \theta(b-r) \theta(r-a) \partial_\theta (\cos \theta (\cos \theta)) \hat{\varphi} \\ &= -\frac{c}{r^3} M_0 \theta(b-r) \theta(r-a) [-\sin \theta \theta(\cos \theta) + \cos \theta \delta(\cos \theta) (-\sin \theta)] \hat{\varphi} \\ &= \frac{c M_0}{r^3} \theta(b-r) \theta(r-a) \sin \theta \theta(\cos \theta) \hat{\varphi} + \frac{c M_0}{r^3} \theta(b-r) \theta(r-a) \cos \theta \delta(\cos \theta) \sin \theta \hat{\varphi} \\ &= \frac{c M_0}{r^3} \sin \theta \theta(\cos \theta) \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{\varphi} \end{aligned}$$

= 0.  $\delta(\cos \theta)$  dentro de un símbolo integral.  
 $\therefore$  Puedo obviar el segundo sumando.

Luego, las corrientes de magnetización son:

$$\vec{J}_M = \vec{J}_M^{lih} + \vec{J}_M^{iman} = \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \vec{H} \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{c M_0}{r^3} \sin \theta \theta(\cos \theta) \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{\varphi}$$

FUENTES DE DIVERGENCIA DE  $\vec{B}$ : Nunca hay.

FUENTES DE DIVERGENCIA DE  $\vec{H}$ : Las fuentes de  $\text{div} \vec{H}$  son las cargas de magnetización definidas por  $\rho_M = -\nabla \cdot \vec{M}$ . Donde  $\vec{M} = \vec{M}^{lih} + \vec{M}^{iman}$  (que ya escribí).

Calculenmos primero las cargas de magnetización que aporta el medio lih:

$$\begin{aligned} \rho_M^{(lih)} &= -\nabla \cdot \vec{M}^{lih} = -\frac{(\mu-1)}{4\pi\mu} \nabla \cdot (\vec{B} \theta(a-r)) = -\frac{(\mu-1)}{4\pi\mu} [\theta(a-r) \nabla \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \nabla (\theta(a-r))] \\ &= -\frac{(\mu-1)}{4\pi\mu} \vec{B} \cdot \hat{r} \partial_r (\theta(a-r)) \\ &= \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} \cdot \hat{r} \delta(a-r) \end{aligned}$$

Al igual que como sucede con  $\vec{J}_M^{lih}$ ,  $\rho_M^{(lih)}$  no se conoce hasta que se resuelven los campos. pero, saber que el medio en  $r < a$  es lih permite inferir que  $\rho_M^{(lih)}$  está concentrada en la superficie  $r = a$ .

Calculenmos las cargas de magnetización que aporta el iman:

$$\begin{aligned} \rho_M^{iman} &= -\nabla \cdot \vec{M}^{iman} = -\nabla \cdot \left( M_0 \frac{\cos \theta}{r^2} \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{r} \right) \\ &= -\frac{M_0}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\cos \theta}{r^2} \theta(b-r) \theta(r-a) \right) \\ &= -\frac{M_0}{r^2} \cos \theta \theta(\cos \theta) [-\delta(b-r) \theta(r-a) + \theta(b-r) \delta(r-a)] \\ &= +\frac{M_0}{r^2} \cos \theta \theta(\cos \theta) \delta(b-r) \theta(r-a) - \frac{M_0}{r^2} \cos \theta \theta(\cos \theta) \theta(b-r) \delta(r-a) \end{aligned}$$

Por la presencia de la  $\delta(b-r)$  es lícito reemplazar  $r^2$  por  $b^2$  y  $\theta(r-a)$  por  $1$  dentro de una integral

reemplazo  $r$  por  $a$  y  $\theta(b-r)$  por  $1$ . Dentro de una integral

$$\rho_M^{iman} = \frac{M_0}{b^2} \cos \theta \theta(\cos \theta) \delta(b-r) - \frac{M_0}{a^2} \cos \theta \theta(\cos \theta) \delta(r-a)$$

De este resultado vemos que la carga de magnetización del iman está distribuida en las superficies  $\{r = b, \cos \theta > 0\}$  y  $\{r = a, \cos \theta > 0\}$ .

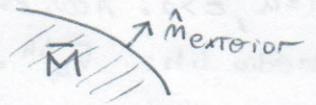
Luego las cargas de magnetización son:

$$\rho_M = \rho_M^{iman} + \rho_M^{lih} = \frac{M_0 \cos \theta \theta(\cos \theta) \delta(b-r) - M_0 \cos \theta \theta(\cos \theta) \delta(r-a)}{b^2} + \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} \cdot \hat{r} \delta(a-r)$$

Resuelvo usando lo que uno sabe de Física 3. Es decir usando las fórmulas:

$$\begin{aligned} \rho_M &= -\nabla \cdot \bar{M} \\ \bar{J}_M &= c \nabla \times \bar{M} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{distribución} \\ \text{en volumen} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_M &= \bar{M} \times \hat{M}_{\text{exterior}} \\ \bar{g}_M &= c \bar{M} \times \hat{M}_{\text{exterior}} \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{distribución} \\ \text{en superficie.} \end{array} \right\}$$



**FUENTES DEL ROTOR DE  $\bar{H}$ :** No hay corrientes libres ni en volumen ni en superficie (ni en punto?)  $\Rightarrow \bar{J}_L = 0 \quad \bar{g}_L = 0$ .

**FUENTES DEL ROTOR DE  $\bar{B}$ :**

• **EN VOLUMEN:** No hay corrientes libres así que  $\bar{J}_L = 0$ . Veamos las corrientes de magnetización en las siguientes regiones abiertas de  $\mathbb{R}^3$ :

i)  $r < a$ : Aquí  $\bar{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \bar{H} \Rightarrow \bar{J}_M = c \nabla \times \bar{M} = \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \nabla \times \bar{H} = \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \frac{4\pi}{c} \bar{J}_L \equiv 0$

ii)  $a < r < b$  y  $z > 0$ : Aquí  $\bar{M} = \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \bar{J}_M = c \nabla \times \bar{M} = c \nabla \times \left( \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \hat{r} \right) = -\frac{c}{r} \partial_\theta \left( \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \right) \hat{\phi}$

$$\bar{J}_M = \frac{c \mu_0}{r^3} \sin \theta \hat{\phi}$$

iii)  $r > b$  y  $z > 0$ : Aquí  $\bar{M} = 0 \Rightarrow \bar{J}_M = 0$

iv)  $r > a$  y  $z < 0$ : idem.

• **EN SUPERFICIE:** No hay corrientes libres así que  $\bar{g}_L = 0$ . Veamos las corrientes de magnetización en las superficies que delimitan los abiertos descritos en el ítem anterior.

v)  $r = a$  y  $z > 0$ : Aquí están presentes, en principio tanto la  $\bar{g}$  de magnetización del medio ( $\bar{g}_M^{\text{med}} = c \bar{M}|_{r=a^-} \times \hat{M}_{\text{ext}} = c \bar{M}|_{r=a^-} \times \hat{r}$ ) como la  $\bar{g}$  de magnetización del imán ( $\bar{g}_M^{\text{imán}} = c \bar{M}|_{r=a^+} \times \hat{r}$ )

Explícitamente:

$$\bar{g}_M = c \frac{(\mu-1) \bar{H}}{4\pi} \Big|_{r=a^-} \times \hat{r} + c \cdot \frac{\mu_0 \omega \theta}{a^2} \hat{r} \times (-\hat{r}) = \frac{c(\mu-1) \bar{H}}{4\pi} \Big|_{r=a^-} \times \hat{r}$$

vi)  $r = a$  y  $z < 0$ : Solo presente la  $\bar{g}$  de magnetización del medio lih:  $\bar{g}_M = \frac{c(\mu-1) \bar{H}}{4\pi} \Big|_{r=a^-} \times \hat{r}$

vii)  $a < r < b$ ,  $z = 0$ : En principio solo estaría presente la  $\bar{g}$  de magnetización del imán. Pero esta da cero, ya que el campo  $\bar{M}$  en  $z = 0$  da cero.

viii)  $r = b$ ,  $z > 0$ : En principio solo estaría la  $\bar{g}$  de magnetización del imán:

$$\bar{g}_M = c \bar{M} \Big|_{r=b^-} \times \hat{r} = c \frac{\mu_0 \omega \theta}{b^2} \hat{r} \times \hat{r} \equiv 0$$

**FUENTES DE DIVERGENCIA DE  $\bar{B}$ :** LA nada misma. never ever!

**FUENTES DE DIVERGENCIA DE  $\bar{H}$ :**

• **EN VOLUMEN:** Veamos las cargas de magnetización en los siguientes abiertos de  $\mathbb{R}^3$ :

i)  $r < a$ : Aquí  $\bar{M} = \frac{\mu-1}{4\pi} \frac{\bar{B}}{\mu} \Rightarrow \rho_M = -\frac{(\mu-1)}{4\pi \mu} \nabla \cdot \bar{B} = 0$

ii)  $a < r < b$ ,  $z > 0$ : Aquí  $\bar{M} = \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \rho_M = -\nabla \cdot \left( \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \hat{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\mu_0 \omega \theta}{r^2} \right) = 0$

iii)  $r > b$ ,  $z > 0$ : Aquí  $\bar{M} = 0 \Rightarrow \rho_M = 0$

iv)  $r > a$ ,  $z < 0$ : idem.

∴ No hay fuentes de divergencia de  $\bar{H}$  en volumen.

• En superficie: Veamos las cargas de magnetización en las superficies que delimitan los abiertos del item anterior.

v)  $r=a, z>0$ : Aquí están presentes, en principio, tanto la  $\vec{\sigma}$  de magnetización que aporta el medio lih:  $\vec{\sigma}_M^{lih} = \bar{M}|_{r=a} \cdot \hat{r}$ , como la  $\vec{\sigma}$  de magnetización que aporta el imán,  $\vec{\sigma}_M^{imán} = M|_{r=a} \cdot \hat{r}$ .

Explícitamente:

$$\vec{\sigma}_M = \vec{\sigma}_M^{lih} + \vec{\sigma}_M^{imán} = \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \bar{H}|_{r=a} \cdot \hat{r} + \frac{M_0 \cos\theta}{a^2} \hat{r} \cdot (-\hat{r})$$

$$\boxed{\vec{\sigma}_M = \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \bar{H}|_{r=a} \cdot \hat{r} - \frac{M_0 \cos\theta}{a^2}}$$

vi)  $r=a, z<0$ : Solo está el  $\vec{\sigma}$  de magnetización del medio lih:  $\boxed{\vec{\sigma}_M = \left(\frac{\mu-1}{4\pi}\right) \bar{H}|_{r=a} \cdot \hat{r}}$ .

vii)  $a < r < b, z=0$ : Solo está la  $\vec{\sigma}$  de magnetización del imán; pero es nula ya que la magnetización del imán es nula en  $z=0$ .

viii)  $r=b, z>0$ : Solo está presente la  $\vec{\sigma}$  de magnetización del imán  $\vec{\sigma}_M^{imán} = M|_{r=b} \cdot \hat{r}$ , o sea  $z>0$ .

$$\boxed{\vec{\sigma}_M = \frac{M_0 \cos\theta}{b^2}}$$

## CÁLCULO DE LOS CAMPOS $\bar{H}$ , $\bar{B}$ y $\bar{M}$ .

Del análisis de las fuentes de los campos  $\bar{B}$  y  $\bar{H}$ , tenemos que las ecuaciones Maxwell para los mismos son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \bar{H} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{H} = 4\pi \left[ \frac{M_0 \cos\theta}{b^2} \theta(b-r) - \frac{M_0 \cos\theta}{a^2} \theta(r-a) + \frac{\mu-1}{4\pi} \bar{B} \cdot \hat{r} \delta(r-a) \right] \end{array} \right. \quad (H-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \bar{H} \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{cM_0}{r^3} \sin\theta \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{\phi} \right] \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad (H-2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \bar{H} \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{cM_0}{r^3} \sin\theta \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{\phi} \right] \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad (B-1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \bar{B} = \frac{4\pi}{c} \left[ \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \bar{H} \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{cM_0}{r^3} \sin\theta \theta(b-r) \theta(r-a) \hat{\phi} \right] \\ \vec{\nabla} \cdot \bar{B} = 0 \end{array} \right. \quad (B-2)$$

• Que campo conviene resolver?

Analizamos las ecuaciones de  $\bar{B}$ ; de (B-2) uno puede decir que  $\exists \bar{A} / \vec{\nabla} \times \bar{A} = \bar{B}$ . Luego reemplazamos en (B-1) a  $\bar{B}$  por  $\vec{\nabla} \times \bar{A}$ , usar gauge de Coulomb ( $\vec{\nabla} \cdot \bar{A} = 0$ ) y ver que se puede hacer. En el mejor de los casos, uno es capaz de dividir  $\mathbb{R}^3$  en regiones, donde la ecuación que queda para  $\bar{A}$  sea homogénea y hacer alguna separación de variables. El problema es que a la derecha de (B-1) aparecen fuentes en volumen, y nunca voy a poder cubrir  $\mathbb{R}^3$  de regiones abiertas donde tal ecuación homogénea valga. (siempre queda un sector sin cubrir) y  $\therefore$  no voy a poder separar variables. y va a ser necesario usar método de Green.

O sea, agarrar y resolver  $\bar{B}$  no conviene.

Veamos el campo  $\bar{H}$ .

En primer lugar, de (H-1) podemos decir que  $\exists \phi / -\vec{\nabla} \phi = \bar{H}$ .

Más aún, como  $\vec{\nabla} \times \bar{H} = 0$  en todo  $\mathbb{R}^3$ , tal  $\phi$  debe ser continuo. Reemplazando  $\bar{H} = -\vec{\nabla} \phi$  en (H-2) obtenemos la ecuación de Poisson para  $\phi$ :

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{\mu_0}{b^2} \omega \theta \theta(\omega \theta) \delta(r-b) - \frac{\mu_0}{a^2} \omega \theta \theta(\omega \theta) \delta(r-a) + \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} \cdot \hat{r} \delta(a-r) \right]$$

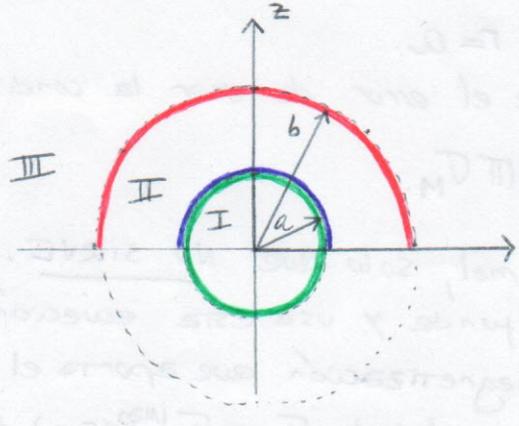
y notar que esta ecuación es homogénea (Laplace) en las regiones:

- I)  $r < a$
- II)  $a < r < b$
- III)  $b < r$

obs: NOTAR que no estoy contando las superficies de separación que son justamente donde se concentran las fuentes de  $\vec{H}$

La manera de dividir  $\mathbb{R}^3$  en estas regiones salió de forma natural, analizando las fuentes de  $\vec{H}$  y viendo como queda la ecuación para su potencial escalar.

Notar que las ecuaciones que cumple  $\vec{H}$  son de la misma naturaleza que las de un campo electrostático, generado por la distribución  $\rho_M = \rho_M^{imán} + \rho_M^{lih}$ . Es decir  $\vec{H}$  es "un campo eléctrico" producido por la distribución de cargas que dibujo a continuación:



$$\left\{ \begin{array}{l} - \sigma_M^{lih} = \frac{\mu-1}{4\pi\mu} \vec{B} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a^-} \quad (\text{Desconocida}) \\ - \sigma_M^{imán}(r=b) = \frac{\mu_0 \omega \theta \theta(\omega \theta)}{b^2} \quad (\text{Dato}) \\ - \sigma_M^{imán}(r=a) = -\frac{\mu_0 \omega \theta \theta(\omega \theta)}{a^2} \quad (\text{Dato}). \end{array} \right.$$

Del dibujo es evidente que conviene separar variables en las 3 regiones I II y III, ya mencionadas.

Presumiendo, si llamamos  $\left\{ \begin{array}{l} \phi_i \quad \text{a} \quad \phi \Big|_{\text{region } i\text{-ésima}} \\ \vec{H}_i \quad \text{a} \quad \vec{H} \Big|_{\text{region } i\text{-ésima}} \end{array} \right\}$  donde  $i \in \{I, II, III\}$ .

tenemos que  $\vec{H}_i$  vale la ecuación de Laplace:  $\nabla^2 \phi_i = 0$

(y que  $\vec{H}_i = -\vec{\nabla} \phi_i$ .) y  $\therefore \phi_i$  es combinación de las ~~funciones~~ funciones de núcleo del operador  $\vec{\nabla}^2$ .  $i \in \{I, II, III\}$ :  $\phi_i$  es de la pinta:

$$\phi_i = \sum_{lm} \left( A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l^m(\cos \theta)$$

Condiciones de contorno del potencial  $\phi$ .

(i) Regularidad del potencial en  $r=0$

$$\phi_I(r \rightarrow 0) < \pm \infty$$

(ii) Regularidad del potencial en  $r \rightarrow +\infty$

$$\phi_{III}(r \rightarrow +\infty) < \infty$$

(iii) Continuidad del potencial en  $r=a$ :

$$\phi_I(r=a) = \phi_{II}(r=a)$$

(iv) Continuidad del potencial en  $r=b$ :

$$\phi_{II}(r=b) = \phi_{III}(r=b)$$

(v) Salto del campo en  $r=a$ .

Aquí usualmente se comete el error de usar la condición:

$$(\bar{H}_{II} - \bar{H}_I) \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = 4\pi \sigma_M$$

Esta ecuación no está mal, solo que NO SIRVE.

En general el alumno se confunde y usa esta ecuación de forma errónea pensando que  $\sigma_M$  es solo la  $\sigma$  de magnetización que aporta el imán. (ie  $\sigma_M^{iman}(r=a) = -\frac{M_0 \cos \theta}{a^2} \Theta(\omega \theta)$ ) Pero en realidad  $\sigma_M = \sigma_M^{iman}(r=a) + \sigma_M^{lih}$  donde

$\sigma_M^{lih} = \frac{\mu-1}{4\pi} \bar{H}_I \cdot \hat{r} \Big|_{r=a}$  es una incógnita del problema.

La condición que hay que usar es el salto de  $\bar{B}$  y a partir de ella deducir una ecuación para el salto de  $\bar{H}$ :

$$\bar{B}_{II} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = \bar{B}_I \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} \quad \text{ya que } \nabla \cdot \bar{B} = 0$$

Pero  $\bar{B}_{II} = \bar{H}_{II} + 4\pi \bar{M}_{II}$  y  $\bar{B}_I = \mu \bar{H}_I \Rightarrow$

$$(\bar{H}_{II} + 4\pi \bar{M}_{II}) \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = \mu \bar{H}_I \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} \Rightarrow$$

$$4\pi \bar{M}_{II} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = (\mu \bar{H}_I - \bar{H}_{II}) \cdot \hat{r} \Big|_{r=a}$$

Ahora bien  $\bar{M}_{II}$  es el campo  $\bar{M}$  en la región II ie  $\bar{M}_{II} = \frac{M_0 \cos \theta}{r^2} \Theta(\omega \theta) \hat{r}$

y  $\bar{H}_I = -\nabla \phi_I \Rightarrow$

$$4\pi \frac{M_0 \cos \theta}{a^2} \Theta(\omega \theta) = (\partial_r \phi_{II} - \mu \partial_r \phi_I) \Big|_{r=a}$$

El dato del medio lih se filtra en esta cc.

(vi) Salto del campo en  $r=b$ .

$$(\bar{H}_{III} - \bar{H}_{II}) \cdot \hat{r} \Big|_{r=b} = 4\pi \sigma_M.$$

ya que  $\sigma_M$  es conocida en  $r=b$ . y es  $\sigma_M = +\frac{M_0 \cos\theta}{b^2} \Theta(\cos\theta)$ . Luego:

$$\boxed{(\partial_r \phi_{II} - \partial_r \phi_{III}) \Big|_{r=b} = 4\pi \frac{M_0}{b^2} \cos\theta \Theta(\cos\theta)}$$

Planteamos ahora la solución en cada región. Como ya habíamos dicho, vale Laplace en cada una y por lo tanto podemos expandir cada  $\phi_i$  en serie de autofunciones. En el problema se tiene simetría de revolución alrededor del eje  $z$ , luego usaremos los polinomios de Legendre para la variable  $\theta$  (en vez de los armónicos esféricos).

### POTENCIAL EN CADA REGIÓN:

$$\begin{cases} \phi_I = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} A_l r^l P_l(\cos\theta) \\ \phi_{II} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \\ \phi_{III} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta). \end{cases}$$

NOTAR que ya se cumplen las condiciones (i) y (ii) de regularidad. Impongamos la condición de continuidad en  $a$  (iii):

$$A_l a^l = C_l a^l + D_l a^{-(l+1)} \Rightarrow A_l = C_l + D_l a^{-(2l+1)}$$

Impongamos la condición de continuidad en  $b$  (iv):

$$C_l b^l + D_l b^{-(l+1)} = B_l b^{-(l+1)} \Rightarrow B_l = C_l b^{2l+1} + D_l.$$

con estas dos últimas relaciones, el potencial en cada región queda:

$$\begin{cases} \phi_I = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} [C_l + D_l a^{-(2l+1)}] r^l P_l(\cos\theta) \\ \phi_{II} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} [C_l r^l + D_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos\theta) \\ \phi_{III} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} [C_l b^{2l+1} + D_l] \frac{P_l(\cos\theta)}{r^{l+1}} \end{cases}$$

Planteemos la condición v):

Primero calculen  $\partial_r \phi_{II} \Big|_{r=a}$  y  $\partial_r \phi_I \Big|_{r=a}$ :

$$\partial_r \phi_{II} \Big|_{r=a} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} [C_l l a^{l-1} - (l+1) D_l a^{-(l+2)}] P_l(\cos\theta).$$

$$\mu \partial_r \phi_I \Big|_{r=a} = \sum_{l \in \mathbb{N}_0} \mu [C_l + D_l a^{-(2l+1)}] l a^{l-1} P_l(\cos\theta).$$

Resto miembro a miembro:

$$\left. (\partial_r \phi_{II} - \mu \partial_r \phi_I) \right|_{r=a} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ c_\ell a^{\ell-1} \ell (1-\mu) - \frac{D_\ell}{a^{\ell+2}} (\ell+1+\mu\ell) \right] P_\ell(\cos\theta).$$

Entonces (iv) equivale a:

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ c_\ell a^{\ell-1} \ell (1-\mu) - \frac{D_\ell}{a^{\ell+2}} (\ell+1+\mu\ell) \right] P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi M_0}{a^2} \cos\theta \Theta(\cos\theta).$$

Multipliquemos por  $\sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta)$  a ambos lados e integro

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ c_\ell a^{\ell-1} \ell (1-\mu) - \frac{D_\ell}{a^{\ell+2}} (\ell+1+\mu\ell) \right] \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi M_0}{a^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta) \cos\theta \Theta(\cos\theta).$$

$\Leftrightarrow$  (cambio variables  $x \equiv \cos\theta$   $dx = -\sin\theta d\theta$ )

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ c_\ell a^{\ell-1} \ell (1-\mu) - \frac{D_\ell}{a^{\ell+2}} (\ell+1+\mu\ell) \right] \int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) P_\ell(x) = \frac{4\pi M_0}{a^2} \int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) \cdot x \Theta(x).$$

$\underbrace{\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) P_\ell(x)}_{\substack{\frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \\ \text{por ortogonalidad}}} = \underbrace{\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) x}_{\substack{\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) x}}$

Luego tenemos que:

$$\left[ c_\ell a^{\ell-1} \ell (1-\mu) - \frac{D_\ell}{a^{\ell+2}} (\ell+1+\mu\ell) \right] \frac{2}{2\ell+1} = \frac{4\pi M_0}{a^2} \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) x. \quad (1)$$

Planteamos la última condición (vi):

$$\left. \partial_r \phi_{III} \right|_{r=b} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ \ell c_\ell b^{\ell-1} - (\ell+1) D_\ell b^{-(\ell+2)} \right] P_\ell(\cos\theta)$$

$$\left. \partial_r \phi_{III} \right|_{r=b} = - \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} \left[ c_\ell b^{2\ell+1} + D_\ell \right] (\ell+1) b^{-(\ell+2)} P_\ell(\cos\theta)$$

Resto miembro a miembro:

$$\left. (\partial_r \phi_{II} - \partial_r \phi_{III}) \right|_{r=b} = \sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} c_\ell b^{\ell-1} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta).$$

Entonces (vi) equivale a:

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} c_\ell b^{\ell-1} (2\ell+1) P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi M_0}{b^2} \cos\theta \Theta(\cos\theta).$$

Multipliquemos por  $\sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta)$  a ambos lados e integro:

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} c_\ell b^{\ell-1} (2\ell+1) \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta) P_\ell(\cos\theta) = \frac{4\pi M_0}{b^2} \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_{\ell'}(\cos\theta) \cos\theta \Theta(\cos\theta).$$

$\Leftrightarrow$  (cambio variables a  $x \equiv \cos\theta$ ).

$$\sum_{\ell \in \mathbb{N}_0} c_\ell b^{\ell-1} (2\ell+1) \int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) P_\ell(x) = \frac{4\pi M_0}{b^2} \int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) x \Theta(x).$$

$\underbrace{\int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) P_\ell(x)}_{\substack{\frac{2}{2\ell+1} \delta_{\ell\ell'} \\ \text{por ortogonalidad.}}} = \int_{-1}^1 dx P_{\ell'}(x) x \Theta(x)$

Luego tenemos que:

$$c_\ell b^{\ell-1} (2\ell+1) \frac{2}{(2\ell+1)} = \frac{4\pi M_0}{b^2} \int_{-1}^1 dx P_\ell(x) x. \quad (2)$$

llamemos  $I_l \equiv \int_0^1 dx P_l(x) x$ . Luego de (2) tenemos:

$$C_l = \frac{4\pi M_0}{2b^{l+1}} I_l \quad (3)$$

Reemplazamos (3) en (1) y despejamos  $D_l$ :

$$D_l = \frac{4\pi M_0}{2b^{l+1}} I_l \left[ \frac{a^{2l+1} l(1-a) - (2l+1)a^l b^{l+1}}{l+1 + \mu l} \right]$$

Solo resta encontrar  $I_l$ .

CÁLCULO DE  $I_l = \int_0^1 dx P_l(x) x$ .

En el parcial se dio la siguiente relación de recurrencia con ayuda:

$$(l+1) P_{l+1} - (2l+1)x P_l + l P_{l-1} = 0.$$

Reemplazo entonces  $x P_l$  en términos de  $P_{l+1}$  y  $P_{l-1}$ :

$$I_l = \int_0^1 dx P_l(x) x$$

$$= \int_0^1 dx \left[ \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1} + \frac{l}{2l+1} P_{l-1} \right]$$

$$= \frac{l+1}{2l+1} \int_0^1 dx P_{l+1} + \frac{l}{2l+1} \int_0^1 dx P_{l-1}.$$

El problema se redujo a saber calcular la integral  $J_l \equiv \int_0^1 dx P_l$ , que vimos en clase.

Recordemos cómo se calcula  $J_l$ .

• Supongamos  $l$  par.

Partimos de la relación de ortogonalidad para  $P_l$  y  $P_0$ :

$$\int_0^1 P_l(x) P_0(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,0} = 2 \delta_{l,0}.$$

Por otro lado, como  $l$  es par, entonces  $P_l$  es función par. Como  $P_0 = 1$  es par también, tenemos que  $P_l \cdot P_0$  es función par y luego vale que:

$$\int_0^1 P_l(x) P_0(x) dx = 2 \int_0^1 P_l(x) P_0(x) dx.$$

$$\Rightarrow \int_0^1 P_l(x) dx = \delta_{l,0}.$$

• Supongamos  $l$  impar.

Para este caso usamos la relación de recurrencia que aparece en mi hojita de fórmulas

$$(2l+1) P_l = \frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx}, \text{ para escribir } P_l \text{ en términos de derivadas de } P_{l-1} \text{ y } P_{l+1}.$$

$$\int_0^1 P_l(x) dx = \int_0^1 \left( \frac{1}{2l+1} \frac{dP_{l+1}}{dx} - \frac{1}{2l+1} \frac{dP_{l-1}}{dx} \right) dx = \frac{1}{2l+1} \left[ \overbrace{P_{l+1}(1)}^{\text{Barrow}} - \cancel{P_{l-1}(1)} - \cancel{P_{l+1}(0)} + \cancel{P_{l-1}(0)} \right]$$

Por lo tanto:

$$J_\ell = \int_0^1 P_\ell(x) dx = \begin{cases} \delta_{0,\ell} & \text{si } \ell \text{ es par} \\ \frac{1}{(2\ell+1)} [P_{\ell-1}(0) - P_{\ell+1}(0)] & \text{si } \ell \text{ es impar.} \end{cases}$$

Para obtener  $I_\ell$  necesitamos  $J_{\ell+1}$  y  $J_{\ell-1}$

$$J_{\ell+1} = \begin{cases} \delta_{0,\ell+1} & \text{si } \ell \text{ impar} \rightarrow \text{observar que esto es siempre 0 ya que } \ell \neq -1 \\ \frac{1}{2\ell+3} [P_\ell(0) - P_{\ell+2}(0)] & \text{si } \ell \text{ es par.} \end{cases}$$

$$J_{\ell-1} = \begin{cases} \delta_{0,\ell-1} & \text{si } \ell \text{ impar} \rightarrow \text{sobrevive } \ell=1 \\ \frac{1}{2\ell-1} [P_{\ell-2}(0) - P_\ell(0)] & \text{si } \ell \text{ es par.} \end{cases}$$

Con esto  $I_\ell$  queda:

$$I_\ell = \begin{cases} \frac{\ell+1}{2\ell+1} \frac{1}{2\ell+3} [P_\ell(0) - P_{\ell+2}(0)] + \frac{\ell}{2\ell+1} \frac{1}{2\ell-1} [P_{\ell-2}(0) - P_\ell(0)] & \text{si } \ell \text{ es par} \\ \frac{1}{3} \delta_{0,\ell-1} & \text{si } \ell \text{ es impar} \end{cases}$$

y ahora reemplazamos en el potencial:

$$\begin{cases} \Phi_I = \frac{2\pi M_0}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \cdot r P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{(2k+1+2k\mu)} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) r^{2k} P_{2k}(\cos\theta) \\ \Phi_{II} = \frac{2\pi M_0}{3b^2} \left( r + \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{2+\mu} \frac{1}{r^2} \right) P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0}{b^{2k+1}} I_{2k} \left( r^{2k} + a \frac{4k+1}{2k(1-\mu) - (4k+1)a^2 b^{2k+1}} \right) P_{2k}(\cos\theta) \\ \Phi_{III} = \frac{2\pi M_0}{3} b \left( 1 + \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{b^3(2+\mu)} \right) \frac{1}{r^2} P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0}{b^{2k+1}} I_{2k} b^{2k} \left( 1 + a \frac{4k+1}{b^{4k+1} (2k+1+2k\mu)} \right) \frac{P_{2k}(\cos\theta)}{r^{2k+1}} \end{cases}$$

↳ obs: El sumando  $k=0$  da cero  $\rightarrow$  No hay término monopolo

$$\text{Donde } I_{2k} = \frac{2k+1}{4k+1} \frac{1}{4k+3} [P_{2k}(0) - P_{2k+2}(0)] + \frac{2k}{4k+1} \frac{1}{4k-1} [P_{2k-2}(0) - P_{2k}(0)]$$

### CÁLCULO DE LOS CAMPOS $\vec{H}$ , $\vec{B}$ y $\vec{M}$ :

Para calcular  $\vec{H}$  en cada region, recordemos que  $\vec{H} = -\nabla\phi$

Para ello necesitamos el gradiente en coordenadas esféricas:

$$\nabla f = \partial_r f \hat{r} + \frac{1}{r} \partial_\theta f \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \partial_\phi f \hat{\phi}$$

Como, en nuestro caso,  $\phi$  es independiente de  $\phi$  solo tenemos componentes de  $\vec{H}$  en  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$

$$\begin{aligned} \vec{H}_I &= \left\{ \frac{2\pi M_0}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{(2k+1+2k\mu)} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) 2k r^{2k-1} P_{2k}(\cos\theta) \right\} \hat{r} \\ &\quad - \frac{\sin\theta}{r} \left\{ \frac{2\pi M_0 r}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{(2k+1+2k\mu)} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) r^{2k} P'_{2k}(\cos\theta) \right\} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{II} &= \left\{ \frac{2\pi M_0}{3b^2} \left( 1 - 2 \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{(2+\mu)} \right) \frac{1}{r^3} P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{b^{2k+1}} \left( 2k r^{2k-1} - \frac{(2k+1)(a^{4k+1} 2k(1-\mu) - (4k+1)a^{2k} b^{2k+1})}{(2k+1+2k\mu) r^{2k+2}} \right) P_{2k}(\cos\theta) \right\} \hat{r} \\ &\quad - \frac{\sin\theta}{r} \left\{ \frac{2\pi M_0}{3b^2} \left( r + \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{2+\mu} \frac{1}{r^2} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{b^{2k+1}} \left( r^{2k} + \frac{4k+1}{(2k+1+2k\mu) r^{2k+1}} \right) P'_{2k}(\cos\theta) \right\} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{III} &= \left\{ \frac{2\pi M_0}{3} b \left( 1 + \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{b^3(2+\mu)} \right) \frac{(-2)}{r^3} P_1(\cos\theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{b^{4k+1}} \left( 1 + \frac{4k+1}{b^{4k+1}(2k+1+2k\mu)} \right) \frac{(-2k-1)}{r^{2k+2}} P_{2k}(\cos\theta) \right\} \hat{r} \\ &\quad - \frac{\sin\theta}{r} \left\{ \frac{2\pi M_0}{3} b \left( 1 + \frac{a^3(1-\mu) - 3ab^2}{b^3(2+\mu)} \right) \frac{1}{r^2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0 I_{2k}}{b^{4k+1}} \left( 1 + \frac{4k+1}{b^{4k+1}(2k+1+2k\mu)} \right) \frac{P'_{2k}(\cos\theta)}{r^{2k}} \right\} \hat{\theta} \end{aligned}$$

Para calcular  $\vec{B}$  sabemos que:

$$\begin{cases} \vec{B}_I = \mu \vec{H}_I \\ \vec{B}_{II} = \vec{H}_{II} + 4\pi \vec{M}_{II} = \vec{H}_{II} + M_0 \frac{\omega\theta}{r^2} \Theta(\cos\theta) \hat{r} \\ \vec{B}_{III} = \vec{H}_{III} \end{cases}$$

Para calcular  $\vec{M}$  sabemos que:

$$\begin{cases} \vec{M}_I = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H}_I \\ \vec{M}_{II} = M_0 \frac{\omega\theta}{r^2} \Theta(\cos\theta) \hat{r} \\ \vec{M}_{III} = 0 \end{cases}$$

Ahora que conocemos los campos en todo el espacio podemos calcular integralmente las corrientes de Magnetización y cargas de Magnetización. Recordar que habiamos llegado a que:

$$\vec{J}_M = \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \vec{H}_I \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{cM_0}{r^3} \sin\theta \Theta(\cos\theta) \Theta(b-r) \Theta(r-a) \hat{\phi}$$

$$\vec{J}_M = \frac{\mu-1}{4\pi} \vec{H}_I \times \hat{r} \delta(r-a) + \frac{M_0}{b^2} \omega\theta \Theta(\cos\theta) \delta(b-r) - \frac{M_0}{a^2} \omega\theta \Theta(\cos\theta) \delta(r-a)$$

Donde el primer sumando de cada expresion era desconocido. Pero ahora puen calcularse:

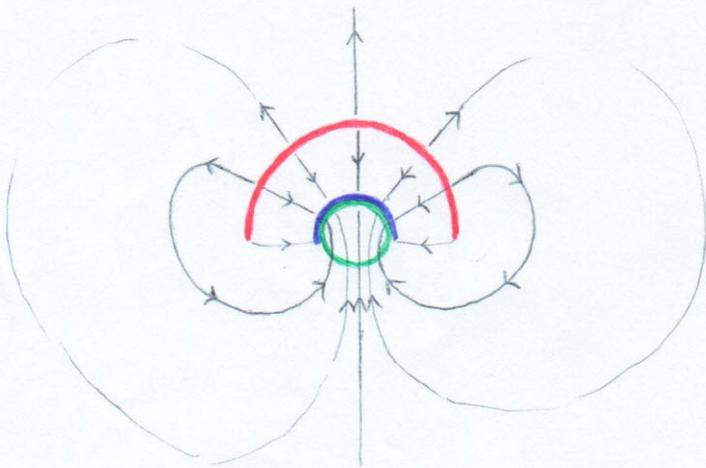
$$\vec{H}_I \times \hat{r} = \begin{cases} -(\vec{H}_I)_\theta \hat{\phi} \\ -(\vec{H}_I)_\phi \hat{\theta} \\ -(\vec{H}_I)_r \hat{\theta} \end{cases}$$

$$\vec{H}_I \cdot \hat{r} = \begin{cases} (\vec{H}_I)_r \\ (\vec{H}_I)_\theta \\ (\vec{H}_I)_\phi \end{cases} \quad \begin{aligned} \vec{H}_I \times \hat{r} \delta(r-a) &= -(\vec{H}_I)_\theta \hat{\phi} \delta(r-a) \\ \vec{H}_I \cdot \hat{r} \delta(r-a) &= (\vec{H}_I)_r \delta(r-a) \end{aligned}$$

$$\vec{J}_M = \frac{c(\mu-1)}{4\pi} \frac{\Delta \sin \theta}{a} \left\{ \frac{2\pi M_0 a}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0}{2k+1+2k\mu} \frac{4k+1}{a^{2k+1}} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) a^{2k} P'_{2k}(\cos \theta) \right\} S(r-a) \hat{\varphi} + \frac{c M_0}{r^3} \Delta \sin \theta \Theta(\cos \theta) \Theta(b-r) \Theta(r-a) \hat{\varphi}.$$

$$P_M = \frac{\mu-1}{4\pi} \left\{ \frac{2\pi M_0}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0}{(2k+1+2k\mu)} \frac{4k+1}{a^{2k+1}} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) a^{2k} P_{2k}(\cos \theta) \right\} S(r-a) + \frac{M_0}{b^2} \cos \theta \Theta(\cos \theta) S(r-b) - \frac{M_0}{a^2} \cos \theta \Theta(\cos \theta) S(r-a).$$

Lineas de Campo.



Momento Inducido:

Integramos la  $\sigma$  del medio lih:

Para facilitar la cuenta definimos cotes  $A$  y  $A_{2k}$  como:

$$\sigma_M^{lih} = \frac{\mu-1}{4\pi} \left\{ \frac{2\pi M_0}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) P_1(\cos \theta) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2\pi M_0}{(2k+1+2k\mu)} \frac{4k+1}{a^{2k+1}} \left( \frac{1}{b^{2k+1}} - \frac{1}{a^{2k+1}} \right) a^{2k} P_{2k}(\cos \theta) \right\}$$

$$= A P_1(\cos \theta) + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} P_{2k}(\cos \theta).$$

$$\vec{M}_{ind} = \int_{\text{esfera de radio } a} \sigma_M^{lih} \cdot a \hat{r} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} d\Omega a^2 \sigma_M^{lih} a \hat{r} \stackrel{\sigma_M^{lih} \text{ indep de } \varphi}{=} 2\pi a^3 \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \sigma_M^{lih}(\cos \theta) \hat{r}$$

Solo aporta la compo en  $\hat{z}$

$$= 2\pi a^3 \hat{z} \int_0^{\pi} \sigma_M^{lih}(\cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta = 2\pi a^3 \hat{z} \int_{-1}^1 \sigma_M^{lih}(x) x dx.$$

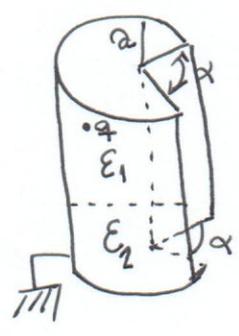
$$= 2\pi a^3 \hat{z} \left\{ A \int_{-1}^1 P_1(x) x dx + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \int_{-1}^1 P_{2k}(x) x dx \right\}.$$

$$= 2\pi a^3 \hat{z} \left\{ A \underbrace{\int_{-1}^1 P_1(x) x dx}_{1/3} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k} \cdot 0 \right\} = \frac{4\pi}{3} a^3 \hat{z} A$$

$$\vec{M}_{ind} = \frac{(\mu-1)}{3} a^3 \left\{ \frac{2\pi M_0}{2+\mu} \left( \frac{1}{b^2} - \frac{1}{a^2} \right) \right\} \hat{z}$$

P2) Cilindro infinito con un defecto angular de apertura  $\alpha$

2



posición de la carga  $q$   
 $\vec{r}_q = (r_0 = b, \varphi_0 = \beta, z_0 = z')$

En  $z = z'$ :

Fuentes de  $\vec{E}$  :

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho = 4\pi(\rho_e + \rho_p)$$

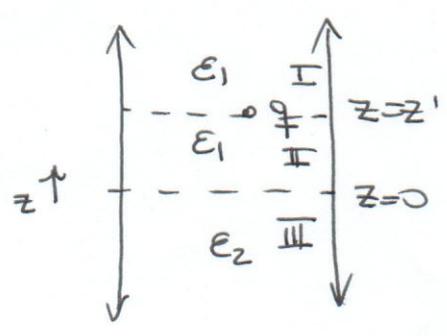
Fuentes de  $\vec{D}$  :

$$\nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_e$$

$$\nabla \times \vec{D} = 4\pi \nabla \times \vec{P}$$

En  $z = z'$   $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \Rightarrow$  Para M.L.I.H  $\vec{D} = (4\pi\chi_e + 1)\vec{E} = \epsilon\vec{E}$   
 $\vec{P} = \chi_e\vec{E}$   $\epsilon = 1 + 4\pi\chi_e$

Para analizar las fuentes resulta útil pensar en varias regiones dividiendo el interior del cilindro.



Tres regiones donde en el interior vale:

- 1)  $\nabla \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\nabla\Phi$
- 2)  $\nabla \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \boxed{\nabla^2\Phi = 0}$

I, II, III.  $\rho_p = 0$  y  $\partial$  que  $\vec{P}_i = \chi_{ei}\vec{E}_i$

$$\nabla \cdot \vec{P}_i = \chi_{ei} \nabla \cdot \vec{E}_i = 0$$

$\chi_{ei} = \text{cte}$

Ftes de  $\vec{E}$  son:

- i)  $q$  libre en la interfase  $z = z'$   
 $\sigma_{pi} = \vec{P}_i \cdot \hat{n}$  en  $z = 0, \rho = a, \varphi = \alpha, \varphi = 0$   
 $\hat{n} = \hat{z}$   $\hat{\varphi} = \pm \hat{n}$

ii)  $\sigma$  inducido por el conductor

Ftes de  $\vec{D}$  son:

- i)  $q$  libre en  $z = z' \leftarrow \sigma_e$
- ii) corrientes de polarización  $\vec{J}_p = \nabla \times \vec{P}_i; \hat{u}_i = \pm \hat{\varphi}, \hat{r}$

En  $z=z'$  la distribución de carga es  $\sigma = \frac{q}{\rho} \delta(\varphi-\beta) \delta(\rho-a) \oplus (\varphi) \oplus (\varphi)$

C. de c.

i)  $\Phi_{II} (z \rightarrow +\infty) < \infty$

ii)  $\Phi_{III} (z \rightarrow -\infty) < \infty$

iii)  $\Phi_{I,II,III} (\rho=a) = 0, \Phi_{I,II,III} (\rho \rightarrow 0) < \infty$

iv)  $\Phi_{I,II,III} (\varphi=0) = \Phi(\varphi=\alpha) = 0$

Salto en las interfaces  $\oplus (-\varphi) \oplus (\varphi)$

v)  $(D_{III} - D_{II}) \cdot \hat{z} = 0$  en  $z=0$

$(\vec{E}_{III} - \vec{E}_{II}) \times \hat{n} = 0$  Continuidad del potencial

vi)  $z=z': (D_{III} - D_{II}) \cdot \hat{n} = 4\pi\sigma_e$

$(\vec{E}_{III} - \vec{E}_{II}) = 0$  continuidad del potencial

Regiones donde resolvamos la ec. de Laplace:

III:  $\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 / \rho < a, z < 0 \}$  I:  $\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 / z > z', \rho < a \}$

II:  $\{ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 / 0 < z < z', \rho < a \}$

Por el teo de Sturm-L. sabemos que tenemos base en  $\hat{\varphi}$  y  $\hat{\rho}$ .

$\hat{\rho}$ )  $\frac{d^2 Q}{d \varphi^2} = -\beta^2 Q$  seleccionamos  $\beta = i\nu^2 \leftarrow$  trigonométrico ó exp. comp

si  $Q(\varphi=0) = Q(\varphi=\alpha) = 0 \Rightarrow Q_{\nu_n} = A_n \sin(\nu_n \varphi)$  con  $\nu_n = \frac{n\pi}{\alpha}, n \in \mathbb{Z}$

$\hat{\varphi}$ ) si  $\nu_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$  la base en  $\hat{\rho}$  es  $\{ J_0, N_0 \}$  se elige  $N_0$  x q1 diverge en  $(\rho=a)$  si  $\nu_n \notin \mathbb{Z} \Rightarrow$  " " " " " "  $\{ J_0, J_{-\nu} \}$  " "  $J_{-\nu}$  " " "

La condición  $\Phi_i(\rho=a) = 0 \quad i=I,II,III$  implica  $J_{\nu}(k a) = 0$

$\Rightarrow k_m a = X_{\nu, m} = X_{\frac{n\pi}{\alpha}, m}$

$\pm k_m z$

$\hat{z}$ ) se tienen combinaciones de exponenciales reales  $e^{\pm k_m z}$  según corresponde en cada región.

La solución es:

$$\Phi_i = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(x \frac{n\pi}{\alpha} \frac{\rho}{a}\right) f_{nm}^{(i)}(z)$$

$$f_{nm}^{(i)}(z) = \begin{cases} \text{(I)} & A_{nm}^I e^{-k_n(z-z')} \\ \text{(II)} & A_{nm}^{II} e^{k_n z} + B_{nm}^{II} e^{-k_n z} \\ \text{(III)} & A_{nm}^{III} e^{k_n z} \end{cases}$$

Continuidad  $z=0$ :  $A^{III} = A^{II} + B^{II}$  (1)

Salto en  $z=0$ :  $\epsilon_2 A^{III} = \epsilon_1 (A^{II} - B^{II})$  (2)  $\leftarrow \epsilon_2 \partial_z \Phi_{III} = \epsilon_1 \partial_z \Phi_{II} \Big|_{z=0}$

continuidad  $z=z'$ :  $A^I = A^{II} e^{k_n z'} + B^{II} e^{-k_n z'}$  (3)

Salto en  $z=z'$  ( $\sigma_1 \neq 0$ ):  $\partial_z \Phi_I - \partial_z \Phi_{II} \Big|_{z=z'} = \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon_1}$

$$\sum_{n,m} k_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(x \frac{n\pi}{\alpha} \frac{\rho}{a}\right) \left[ -A^I - (A^{II} e^{k_n z'} - B^{II} e^{-k_n z'}) \right] = \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon_1}$$

$$\left[ B^{II} e^{-k_n z'} - A^I - A^{II} e^{k_n z'} \right]$$

o sea las sigtas relaciones:  $\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{nm}$

$\int_0^a \rho J_0\left(x \frac{n\pi}{\alpha} \frac{\rho}{a}\right) J_0\left(x \frac{m\pi}{\alpha} \frac{\rho}{a}\right) d\rho = \delta_{nm} \frac{a^2}{2} \left[ J_0^2\left(x \frac{n\pi}{\alpha}\right) \right]'$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \alpha k_n \left[ B^{II} e^{-k_n z'} - A^I - A^{II} e^{k_n z'} \right] = \frac{4\pi\sigma_1}{\epsilon_1} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(x \frac{n\pi}{\alpha} \frac{a}{2}\right)$$

$$B^{II} e^{-k_n z'} - A^I - A^{II} e^{k_n z'} = \square \quad (4)$$

Resuelvo el sistema (1)-(4) para hallar los coeficientes:

(1):  $A^{III} = A^{II} + B^{II}$  ✓

(2):  $A^{III} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} (A^{II} - B^{II})$  ✓

(3):  $A^I = A^{II} e^{k_n z'} + B^{II} e^{-k_n z'}$  ✓

(4):  $B^{II} e^{-k_n z'} - A^I - A^{II} e^{k_n z'} = \square$

(1)  $\cap$  (2)  $\left[ B^{II} = A^{II} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \right]$  (5); (3)  $\cap$  (4)  $\left[ A^{III} = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} A^I \right]$  (6) ✓

(5)  $\cap$  (3)  $\left[ A^I = A^{II} \left( e^{k_n z'} + \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) e^{-k_n z'} \right) \right]$  (7) ✓

(5), (z) reemplazo en (4):

$$\left[ e^{-kmz'} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) - e^{kmz'} - \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) e^{-kmz'} - e^{kmz'} \right] A^{\text{II}} = \square$$

$$A^{\text{II}} = -\frac{\square}{z} e^{-kmz'}$$

$$A^{\text{II}} = \frac{8\pi q}{\epsilon_1 a^2 \omega \chi_{nm}} \sin\left(\frac{n\pi z}{h}\right) J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\chi_{\frac{n\pi}{\alpha}} \frac{b}{a}\right)$$

obs:  $[A^{\text{II}}] \sim \frac{q}{\epsilon_1 a}$  unidades de potencial ✓

como  $\Phi \sim \frac{q}{\alpha} \Rightarrow$  a pantalla a la carga eléctrica.

Cargas de polarización:  $\bar{E}_i = -\nabla \bar{\Phi}_i$   $i = \text{I, II, III}$

$\bar{\Phi}_i = \chi_{\epsilon_i} \bar{E}_i$  porque el medio es lineal I+II.

Se tiene que calcular en las diferentes superficies  $(P_i - P_j) \cdot \hat{n}_{ij} = \sigma_p$

$\frac{j}{i} \uparrow \hat{n}_{ij}$  donde las superficies son:  $z=0$   $\hat{n} = \hat{z}$

$$\sigma_p = (\bar{P}_{\text{II}} - \bar{P}_{\text{III}}) \cdot \hat{z} \Big|_{z=0}$$

$$\sigma_p = P_i \cdot \hat{p} \Big|_{p=a} \quad (\text{ya que en el exterior } \bar{P}_j = 0)$$

$i = \text{I, II, III}$

Lo mismo para las superficies  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi = 0$  con normal  $\hat{n} = \pm \hat{\varphi}$

También calcular qué pasa en la interfase  $z = z'$  si existe un  $\sigma_p \neq 0$ ?

Por otro lado también se puede calcular la  $\sigma_e$  inducida en la superficie conductora usando lo  $\sigma_p$  que ya usamos y que  $(\bar{E}_2 - \bar{E}_1) \cdot \hat{n} = 4\pi \sigma_e = 4\pi (\sigma_{\text{lin}} + \sigma_p)$

esto para la superficie  $p = a$  y  $\varphi = 0, \varphi = \alpha$ .

(b) sólo sobre una de las superficies  $\Phi_{\text{milto}} = \int_V f(x') G_D^V(x|x') d^3x'$

Habría que escribir bien  $f(x')$  y usar el resultado (a) de la  $G_D$

con  $f(x) = \lambda \delta(r' - \frac{a}{2}) \delta(z' - z_b) \Theta(\varphi) \Theta(\pi - \varphi) \leftarrow$  sólo integra en  $\varphi$