

Problema 4 del primer parcial de FT1 - 2do cuatri 2014

1 Solución por imágenes

Usualmente cuando nos plantean alguna geometría de conductores a tierra, lo más común es pensar en el método de imágenes, más que nada cuando se trata de alguna combinación de esferas y/o planos infinitos (con los cuales ya lidiamos antes y hasta podemos tener a mano algún resultado previo).

En esta dirección vamos. Imaginemos que en vez de un dipolo tenemos solamente una carga q en la posición del dipolo. ¿Qué cargas deberíamos poner en este caso para emular la condición de potencial nulo en los conductores? Lo vamos a ver por separado, empezando por los planos.

Sabemos que una carga espejada respecto de un plano y con signo opuesto anula el potencial en dicho plano. Esto (por superposición) vale en general para cualquier cantidad de cargas siempre que coloquemos correctamente una imagen espejada por cada una de las cargas originales.

Supongamos que tenemos una carga en la posición $\vec{r}'_0 = (a, b, 0)$. ¿Anulamos el potencial en los planos $x = 0$ e $y = 0$ si colocamos como cargas imagen solamente $q_1 = -q$ en $(a, -b, 0)$ y $q_2 = -q$ en $(-a, b, 0)$? La respuesta es que no, porque justamente para que esto suceda deberían *todas* las cargas en $x > 0$ tener sus reflejadas en $x < 0$ y *todas* las cargas en $y > 0$ sus reflejadas en la región $y < 0$. La solución es poner una tercera carga imagen $q_3 = q$ como reflejo de q_1 respecto del plano $x = 0$ y simultáneamente reflejo de q_2 respecto del plano $y = 0$. Lo que pasa:

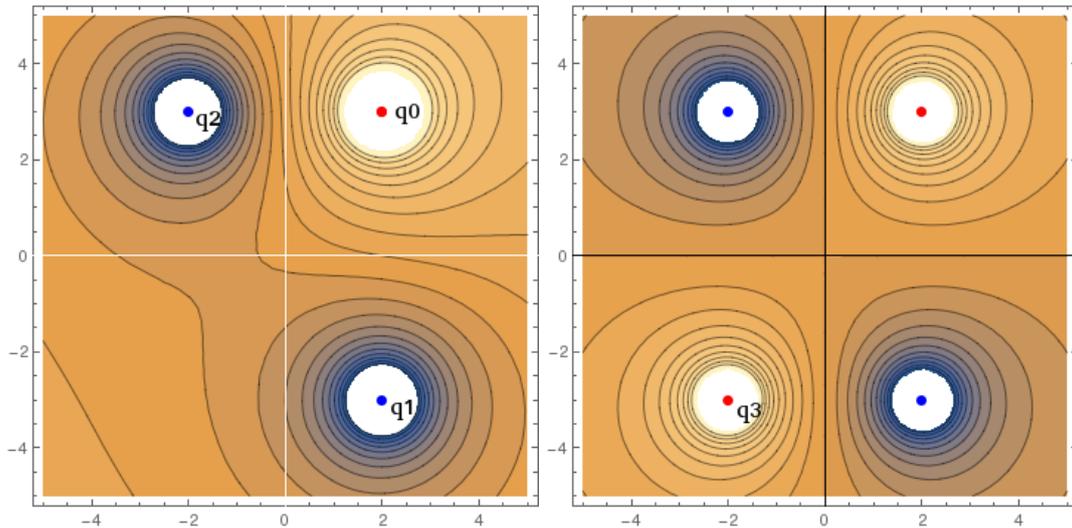


Fig. 1: Izquierda = dos cargas imagen. Derecha = planos a tierra emulados por tres cargas imagen.

Después veremos que llevar este resultado a los dipolos es simple si los pensamos como la superposición de dos cargas: habrá que poner tres dipolos imagen si queremos anular el potencial en los planos.

Para el caso de la esfera conductora de radio a usemos directamente que el valor de la carga imagen y su posición son conocidas; la deducción de estos valores no es complicada de todas maneras. Tenemos que es $q_i = -qa/r_q$ y su posición está en la misma dirección que la carga real, a distancia $r_i = a^2/r_q$ del centro (q es la carga real y r_q la distancia desde el centro de la esfera). Al igual que en el caso de los planos, si queremos anular el potencial en la esfera para más de una carga deberemos poner tantas cargas imagen dentro de la esfera como cargas reales tengamos afuera. Un dibujito:

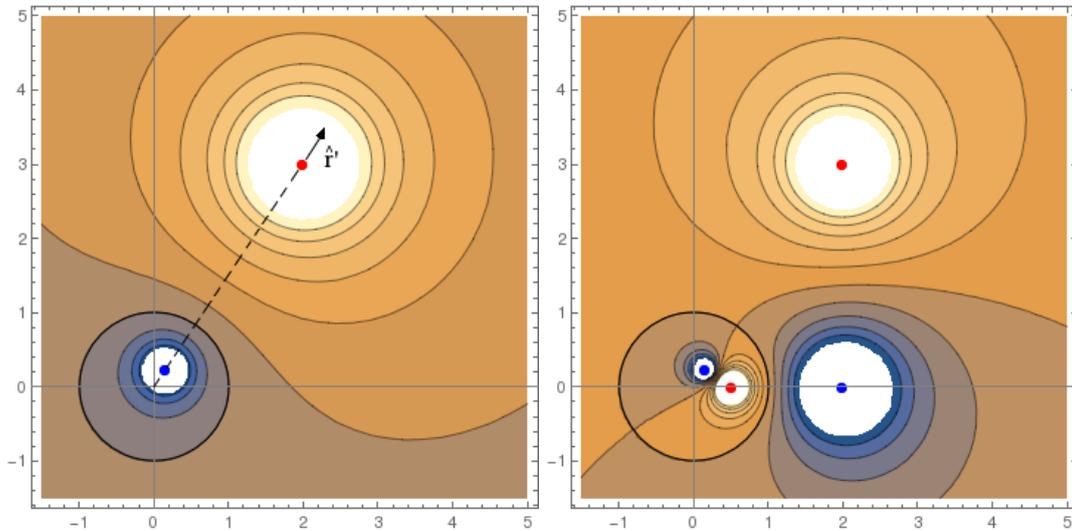


Fig. 2: Izquierda = carga q en posición $r_q \hat{r}'$ + carga $-qa/r_q$ en posición $a^2/r_q \hat{r}'$. Derecha = Otra carga con su imagen. El potencial sigue siendo nulo en $r = a$

La pregunta ahora es cómo combinar el resultado de los planos con el de la esfera... A continuación la solución con todas las imágenes y la explicación del sentido de cada una de ellas después:

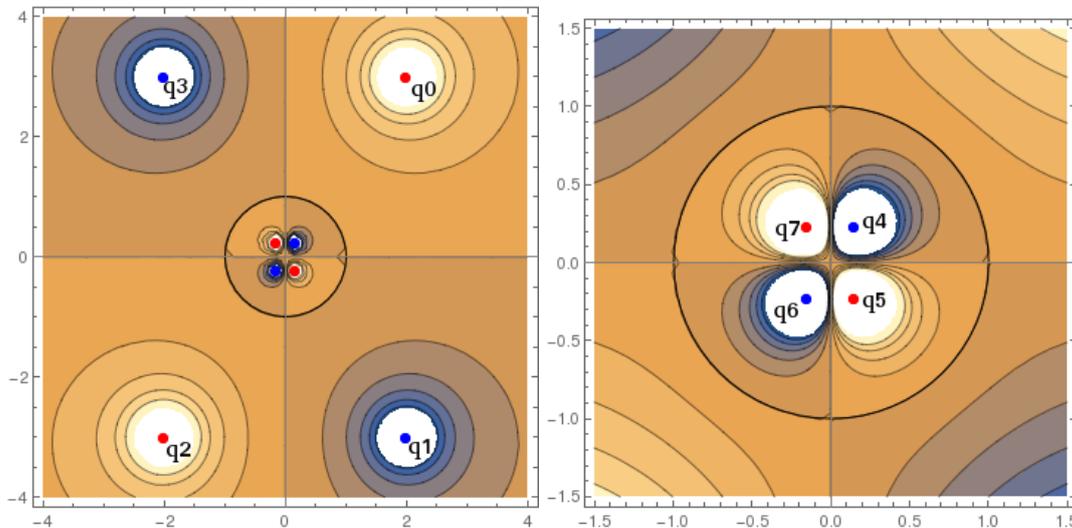


Fig. 3: Potencial nulo en planos y esfera

$q_0 = q$ es la carga real. Imaginemos que primero queremos anular el potencial en los planos. Poniendo las imágenes q_1 , q_2 y q_3 lo logramos, pero con esto no podemos nunca emular la esfera conductora (ver Fig. 1). Para eso tenemos que agregar convenientemente nuevas imágenes dentro de la esfera como vimos hace un rato. Sean estas cargas q_4, \dots, q_7 , ¿qué podemos afirmar ahora? Que el potencial sobre la esfera es 0. ¿Siguiendo siendo válido que sobre los planos el potencial es 0? En general cuando uno agrega nuevas cargas imagen, se van rompiendo los logros anteriores (como vemos en los problemas donde tenemos que poner infinitas imágenes), pero este no es el caso porque si miramos cómo están distribuidas las nuevas cargas, vemos que unas son imagen respecto de los planos de las otras, con lo cual la condición de nulidad de potencial en $x = 0$ e $y = 0$ se sigue manteniendo.

Es fácil ver que si hubiésemos empezado por poner la carga imagen que anula el potencial de la esfera (q_4) íbamos a estar obligados por los planos a poner las cargas restantes: q_1, q_2, q_3 como imágenes de

q_0 y q_5, q_6, q_7 como imágenes de q_4 , recuperando el mismo resultado.

Hasta acá vimos la equivalencia entre los siguientes problemas en la región de interés (notar que ninguna carga imagen quedó en el interior de la región):

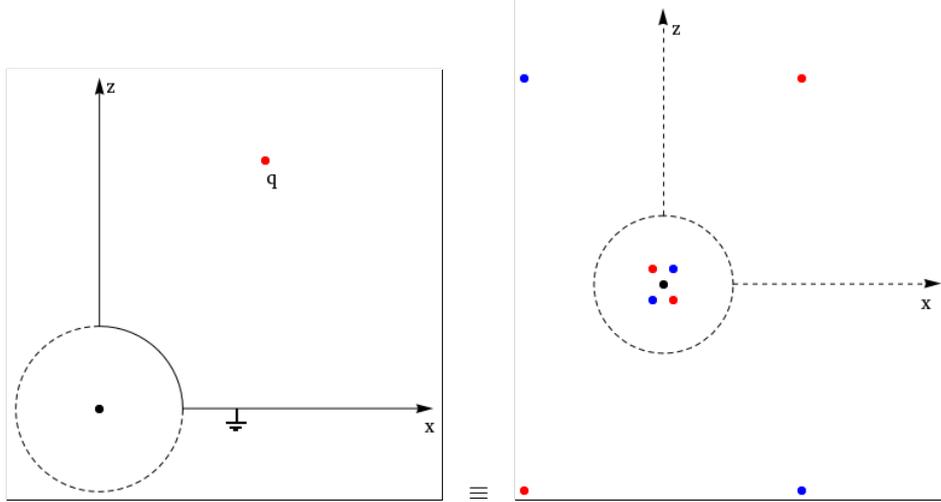


Fig. 4: Izquierda = Problema con una carga y contorno a tierra. Derecha = Problema equivalente con imágenes.

¿Cómo saltamos al caso de dipolos? Si pensamos un dipolo como dos cargas opuestas separadas una distancia pequeña δ , podemos poner las imágenes correspondientes como antes (o sea, 14 imágenes...) y nos aseguramos que la condición de borde se sigue cumpliendo. Al tomar el límite $\delta \rightarrow 0$ manteniendo $q\delta \rightarrow p_0$ veremos que recuperamos el problema original (las 14 imágenes pasan a ser 7 para el dipolo.)

Dipolo frente a una esfera conductora

Las imágenes de los dipolos respecto de los planos son fáciles ya que no son mas que un dipolo de la misma intensidad orientado de manera conveniente de acuerdo a cómo se reflejan las cargas que lo componen.

En el caso de la esfera no podemos decir lo mismo y hay que calcularla. Consideremos entonces el problema de la Fig. 5.

Escribimos el potencial completo de esta configuración como

$$\phi(\vec{r}) = \phi_{cargas} + \phi_{imagen} \quad (1)$$

donde

$$\phi_{cargas} = \frac{q_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|} = \frac{q}{|\vec{r} - s\hat{r}'|} + \frac{-q}{|\vec{r} - (s + \delta)\hat{r}'|} \quad (2)$$

y del resultado para las cargas imagen en una esfera tenemos que

$$\begin{aligned} \vec{r}_{i1} &= \frac{a^2}{s}\hat{r}', & \vec{r}_{i2} &= \frac{a^2}{s + \delta}\hat{r}' \\ q_{i1} &= \frac{a}{s}(-q), & q_{i2} &= \frac{a}{s + \delta}q \end{aligned} \quad (3)$$

y por eso queda

$$\phi_{imagen} = \frac{q_{i1}}{|\vec{r} - \vec{r}_{i1}|} + \frac{q_{i2}}{|\vec{r} - \vec{r}_{i2}|} = \frac{-\frac{a}{s}q}{|\vec{r} - \frac{a^2}{s}\hat{r}'|} + \frac{\frac{a}{s + \delta}q}{|\vec{r} - \frac{a^2}{s + \delta}\hat{r}'|}. \quad (4)$$

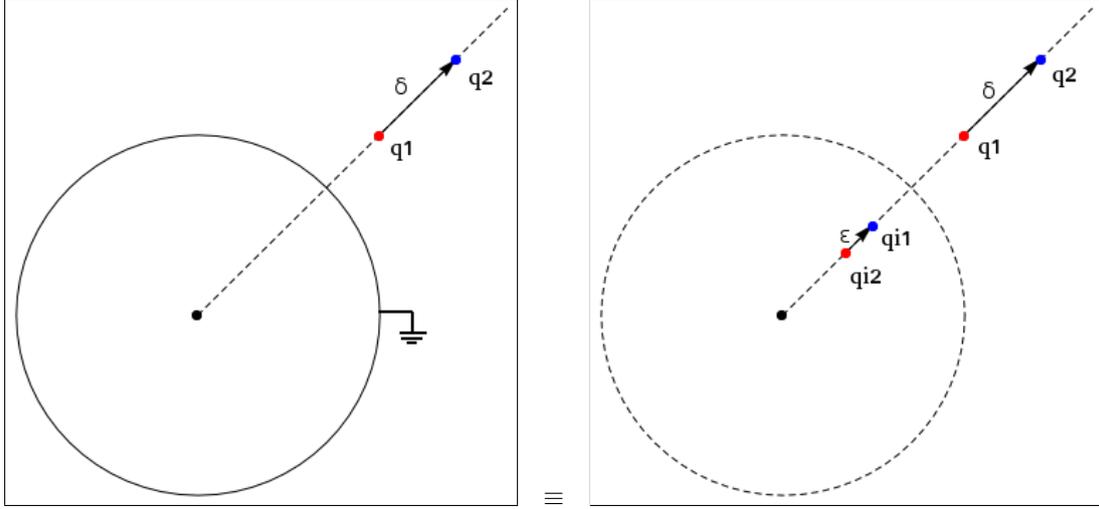


Fig. 5: Izquierda = dipolo \bar{p}_0 frente a una esfera a tierra. Derecha = problema equivalente con método de imágenes

Notemos que aunque las cargas imagen son opuestas los dipolos terminan orientados de la misma manera puesto que cuanto más alejada está una carga de la esfera, su imagen resulta más cercana al centro de la misma.

Usando que $\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|}$ se desarrolla alrededor de $\bar{r}' = \bar{r}'_0$ como

$$\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'|} \approx \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'_0|} + \nabla \left(\frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'_0|} \right) |_{\bar{r}'=\bar{r}'_0} (\bar{r}' - \bar{r}'_0) + \dots = \frac{1}{|\bar{r}-\bar{r}'_0|} - \frac{(\bar{r}-\bar{r}'_0)}{|\bar{r}-\bar{r}'_0|^3} \cdot (\bar{r}' - \bar{r}'_0). \quad (5)$$

Entonces, desarrollando alrededor de $\bar{r}_0 = s\hat{r}'$ la ecuación (2) es

$$\phi_{cargas} \approx q \left\{ \frac{1}{|\bar{r}-s\hat{r}'|} \right\} - q \left\{ \frac{1}{|\bar{r}-s\hat{r}'|} - \frac{(\bar{r}-s\hat{r}')}{|\bar{r}-s\hat{r}'|^3} \cdot (\bar{r}'_2 - s\hat{r}') \right\} = \frac{(\bar{r}-s\hat{r}')}{|\bar{r}-s\hat{r}'|^3} \cdot (q\delta\hat{r}') \quad (6)$$

(recordar que $\bar{r}'_2 = (s+\delta)\hat{r}'$).

Al tomar el límite $\delta \rightarrow 0$ manteniendo $q\delta \rightarrow p_0$, llegamos al potencial generado por el dipolo ubicado en $s\hat{r}'$:

$$\phi_{cargas} \rightarrow \phi_{dipolo} = p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r}-s\hat{r}')}{|\bar{r}-s\hat{r}'|^3} \quad (7)$$

Para ver cuál es la imagen de este dipolo en la esfera tomamos el mismo límite, pero esta vez en la ecuación (4). Una forma de hacer esto es llevar (4) a algo parecida a (2). La distancia entre las cargas imágenes dentro de la esfera es

$$\varepsilon = \frac{a^2}{s} - \frac{a^2}{s+\delta} = \frac{a^2\delta}{s(s+\delta)} \quad (8)$$

entonces podemos decir

$$\phi_{imagen} = \frac{-\frac{a}{s}q}{|\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}'|} + \frac{\frac{a}{s+\delta}q}{|\bar{r}-\left(\frac{a^2}{s}-\varepsilon\right)\hat{r}'|} = \left[\frac{-\frac{a}{s}q}{|\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}'|} + \frac{\frac{a}{s}q}{|\bar{r}-\left(\frac{a^2}{s}-\varepsilon\right)\hat{r}'|} \right] + \frac{\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)q}{|\bar{r}-\left(\frac{a^2}{s}-\varepsilon\right)\hat{r}'|}. \quad (9)$$

El término entre corchetes es de la misma forma que (2) y por lo tanto en el desarrollo va a quedar:

$$\phi_{imagen} \approx \left[\frac{(\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}')}{|\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}'|^3} \cdot (a/s)q\varepsilon\hat{r}' \right] + \frac{\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)q}{|\bar{r}-\left(\frac{a^2}{s}-\varepsilon\right)\hat{r}'|}. \quad (10)$$

Por último, al tomar $\delta \rightarrow 0$, $q\delta \rightarrow p_0$ vemos que $(a/s)q\varepsilon \rightarrow (a^3/s^3)p_0$ y por lo tanto (el límite en el otro término es fácil también):

$$\phi_{imagen} \rightarrow \phi_{imagen(dipolo)} = \frac{a^3}{s^3}p_0\hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}')}{|\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}'|^3} - \frac{\frac{a}{s^2}p_0}{|\bar{r}-\frac{a^2}{s}\hat{r}'|}. \quad (11)$$

Conclusión: la imagen que anula el potencial en una esfera de radio a (de un dipolo p_0 orientado radialmente) es un dipolo de valor $\frac{a^3}{s^3}p_0$ ubicado a una distancia $\frac{a^2}{s}$ del origen y orientado en la misma dirección que el original, mas una carga de valor $-\frac{a}{s^2}p_0$ puesta en el mismo lugar.

Notar que la carga extra depende del sentido en el que apunta el dipolo. Si es en dirección \hat{r} (como el que acabamos de ver) la carga es negativa, mientras que en el caso contrario es al revés.

Volviendo al problema...

Como ya conocemos cuál es la imagen del dipolo que anula la esfera, lo que nos falta emular es la condición de potencial nulo sobre los planos. Esto ya vimos que es fácil porque la imagen de un dipolo respecto de un plano es el mismo dipolo espejado pero con el sentido cambiado.

Busquemos las direcciones en las que apuntan los dipolos imagen y sus posiciones si solo tenemos en cuenta los planos conductores. Si la posición del dipolo real es (en coordenadas esféricas) $\vec{r}'_0 = (r', \theta', \varphi') = (r', \theta', 0) = r' \hat{r}'$ entonces las posiciones de los dipolos imágenes serán (dado que todos están sobre el plano xz):

$$\begin{aligned}\vec{r}'_1 &= (r'_1, \theta'_1, \varphi'_1) = (r', \pi - \theta', 0) = r' \hat{r}'' \\ \vec{r}'_2 &= (r'_2, \theta'_2, \varphi'_2) = (r', \theta', \pi) = r'(-\hat{r}') \\ \vec{r}'_3 &= (r'_3, \theta'_3, \varphi'_3) = (r', \pi - \theta', \pi) = r'(-\hat{r}'').\end{aligned}\quad (12)$$

donde llamamos

$$\begin{aligned}\hat{r}'_0 &= \sin \theta' \hat{x} + \cos \theta' \hat{z} = \hat{r}' \\ \hat{r}'_1 &= \sin \theta' \hat{x} - \cos \theta' \hat{z} = \hat{r}''.\end{aligned}\quad (13)$$

Además vemos que los dipolos serán:

$$\begin{aligned}p_0 \hat{r}' &\quad (\text{el dipolo real}) \\ p_0(-\hat{r}'') &\quad (\text{dipolo imagen 1}) \\ p_0(-\hat{r}') &\quad (\text{dipolo imagen 2}) \\ p_0(\hat{r}'') &\quad (\text{dipolo imagen 3}).\end{aligned}\quad (14)$$

Así, el potencial generado por estos dipolos puede escribirse como dice la ecuación (7):

$$\phi(\vec{r}) = p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\vec{r} - r' \hat{r}')}{|\vec{r} - r' \hat{r}'|^3} + p_0(-\hat{r}'') \cdot \frac{(\vec{r} - r' \hat{r}'')}{|\vec{r} - r' \hat{r}''|^3} + p_0(-\hat{r}') \cdot \frac{(\vec{r} - r'(-\hat{r}'))}{|\vec{r} - r'(-\hat{r}')|^3} + p_0 \hat{r}'' \cdot \frac{(\vec{r} - r'(-\hat{r}''))}{|\vec{r} - r'(-\hat{r}'')|^3} \quad (15)$$

(ver Fig. 6).

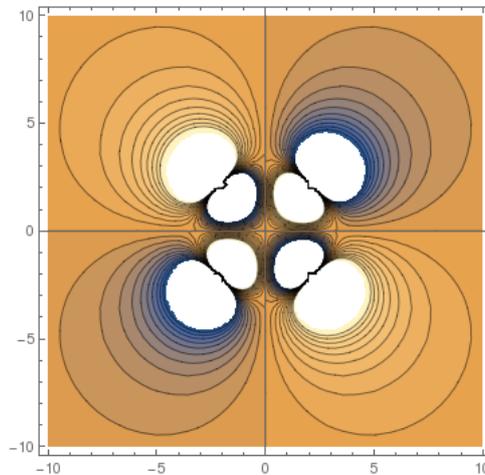


Fig. 6: 4 dipolos: Planos a tierra

El último paso será colocar las imágenes de cada uno de estos dipolos dentro de la esfera, y con eso conseguir la condición de potencial 0 en la superficie. Siguiendo la ecuación (11) esto queda:

$$\phi_{total} = \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 \quad (16)$$

Con

$$\phi_1(\bar{r}) = p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r} - r' \hat{r}')}{|\bar{r} - r' \hat{r}'|^3} + \frac{a^3}{r'^3} p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}')}{|\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|^3} - \frac{\frac{a}{r'^2} p_0}{|\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|} \quad (17)$$

$$\phi_2(\bar{r}) = -p_0 \hat{r}'' \cdot \frac{(\bar{r} - r' \hat{r}'')}{|\bar{r} - r' \hat{r}''|^3} - \frac{a^3}{r'^3} p_0 \hat{r}'' \cdot \frac{(\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}'')}{|\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}''|^3} + \frac{\frac{a}{r'^2} p_0}{|\bar{r} - \frac{a^2}{r'} \hat{r}''|} \quad (18)$$

$$\phi_3(\bar{r}) = -p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r} + r' \hat{r}')}{|\bar{r} + r' \hat{r}'|^3} - \frac{a^3}{r'^3} p_0 \hat{r}' \cdot \frac{(\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}')}{|\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|^3} + \frac{\frac{a}{r'^2} p_0}{|\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}'|} \quad (19)$$

$$\phi_4(\bar{r}) = p_0 \hat{r}'' \cdot \frac{(\bar{r} + r' \hat{r}'')}{|\bar{r} + r' \hat{r}''|^3} + \frac{a^3}{r'^3} p_0 \hat{r}'' \cdot \frac{(\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}'')}{|\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}''|^3} - \frac{\frac{a}{r'^2} p_0}{|\bar{r} + \frac{a^2}{r'} \hat{r}''|} \quad (20)$$

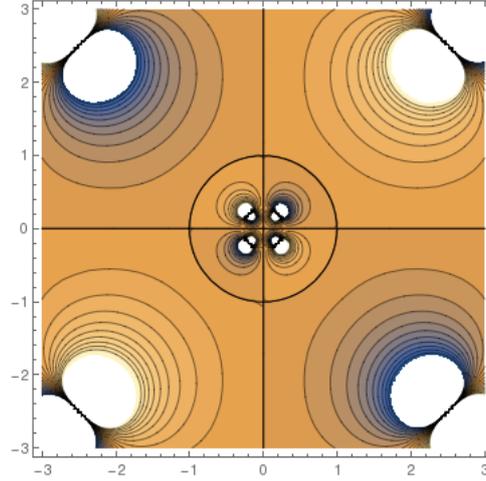


Fig. 7: 7 imágenes: Potencial equivalente

Al final nos preguntan los momentos monopolar y dipolar de la configuración. Para calcular el monopolar tenemos que sumar las cargas totales. Los dipolos aportan carga neta nula, mientras que las cargas imagen dentro de la esfera no. Sin embargo, vemos que las cuatro cargas también suman cero, pues hay dos positivas y dos negativas, y son todas del mismo valor.

En cuanto al momento dipolar: como el monopolar es 0, el momento dipolar no dependerá de la posición desde la cual lo calculemos. En particular, dado que esto es verdad también para cada dipolo por separado, podemos calcular el momento dipolar llevando todos los dipolos al origen y haciendo la suma en ese lugar. Sin embargo, vemos que nuevamente es cero, porque por cada flecha en una dirección tenemos otra apuntando en sentido contrario y con mismo valor absoluto. Desde lejos se ve algo así:

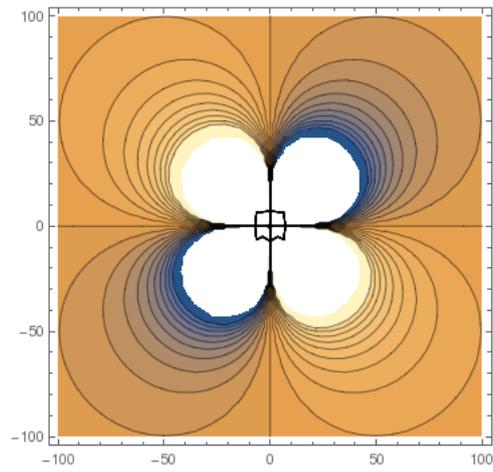


Fig. 8: *Potencial visto desde lejos*