

## ¿Un disco cargado uniformemente es un conductor?

Calcule la distribución de carga  $\sigma$  de un disco de radio  $a$  suponiendo que el disco es un conductor perfecto. Verifique que, en ese caso, las cargas no se distribuyen uniformemente a lo largo del disco.

- ¿Dónde observa una mayor acumulación de cargas? Explique por qué.
- Compare la distribución de cargas hallada con el modelo del anillo cargado uniformemente. ¿Encuentra alguna similitud?
- ¿En qué región del espacio es posible ignorar los “efectos de borde”? En ese caso, un disco cargado uniformemente ¿se parece a un conductor perfecto?

### Solución

En un conductor perfecto, las cargas pueden moverse libremente (instantáneamente), de manera que pueden reacomodarse hasta que las fuerzas entre ellas se anule (sin salirse del conductor). Por lo tanto, al final del proceso de reacomodamiento, esperamos un campo de fuerzas nulo en el interior del conductor ( $\mathbf{F} = 0$ ). Esto es lo mismo que esperar un campo eléctrico nulo ( $\mathbf{E} = \mathbf{F}/q$ ), ya que éste representa la fuerza que sentiría cada carga del conductor (excluimos los bordes, ya que las cargas no pueden abandonar el medio).

Si el campo electrostático es nulo, entonces el potencial entre dos puntos cualquiera ( $a$  y  $b$ ) del medio debe ser el mismo

$$\phi(a) - \phi(b) = \int_a^b \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi(a) = \phi(b) \quad (1)$$

Fuera del conductor existirá campo eléctrico, porque el conductor está cargado (aunque las cargas estén debidamente distribuidas de manera de anular el campo en su interior) y esas cargas actúan como fuentes de campo eléctrico. Recordar que siempre es posible encerrar al conductor en una superficie gaussiana de manera que el flujo a través de la superficie es proporcional a las cargas encerradas

$$\iint_{S(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{ley de Gauss}) \quad (2)$$

Por el contrario, cualquier volumen cerrado que *no incluya* al conductor no generará un flujo neto de campo eléctrico, ya que no encierra carga alguna (las cargas están únicamente en el conductor). Por el teorema de la divergencia sabemos que

$$\iint_{S(V)} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{E} dV = 0 \quad (\text{porque } q_{\text{encerrada}} = 0) \quad (3)$$

y como el volumen  $V$  se elige arbitrariamente (aunque siempre fuera del conductor), entonces debe ser que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ .

Hasta el momento sabemos que en el interior del conductor se cumple que  $\mathbf{E} = 0$ , mientras que en el exterior  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . En el borde (o superficie) del conductor hay un “salto” abrupto del campo eléctrico porque pasamos súbitamente de la región interior ( $\mathbf{E} = 0$ ) a la exterior, en donde hay un flujo de campo eléctrico. Evidentemente, esto sólo se puede deber a las cargas del conductor distribuidas en la superficie.

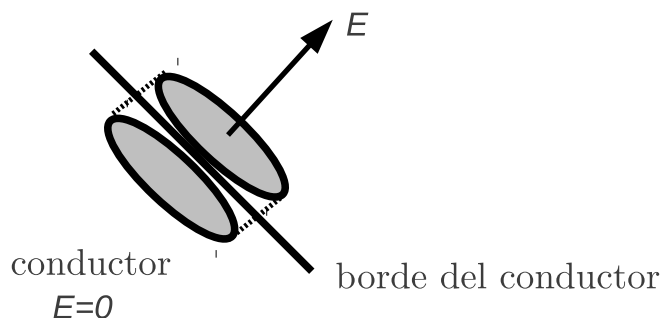
### ¿Por qué las carga se distribuyen en la superficie?

Porque si tomamos un pequeño volumen en el interior del conductor, y ese volumen encierra alguna carga, entonces existiría un flujo de campo eléctrico a través de la superficie de ese volumen. Pero sabemos que  $\mathbf{E} = 0$  en el conductor. Por lo tanto, no puede haber cargas en el interior. Las cargas deberán distribuirse entonces en la superficie del conductor.

### ¿Cuánto vale el “salto” del campo $\mathbf{E}$ en la superfcie del conductor?

Si tomamos una pequeña superficie gaussiana que contenga una porción  $\delta\mathbf{s}$  de la superficie del conductor, notaremos que únicamente el flujo de la cara exterior (de la superficie gaussiana) contribuye en la aplicación de la ley de Gauss (recordar que en el interior  $\mathbf{E} = 0$ )

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{s} = \frac{\delta q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \delta s}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{n}} \Big|_{\text{sup}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (4)$$



El campo eléctrico depende de la densidad superficial de carga  $\sigma$ . ¡El problema es que no sabemos cuánto vale  $\sigma$ ! Efectivamente, desconocemos cuánto vale porque las cargas se acomodaron hasta alcanzar la condición  $\mathbf{E} = 0$ . Lo único que sabemos es que no hay campo eléctrico en el interior del conductor, o sea, que su potencial  $\phi$  es constante según la relación (1).

Para precisar el problema, al menos se debe aclarar a qué valor de potencial se coloca el conductor (respecto de alguna referencia). Si no se da este dato, el problema no puede resolverse completamente porque según la relación (1), la diferencia de potencial entre dos puntos dependerá de lo intenso que sea el campo  $\mathbf{E}$ .

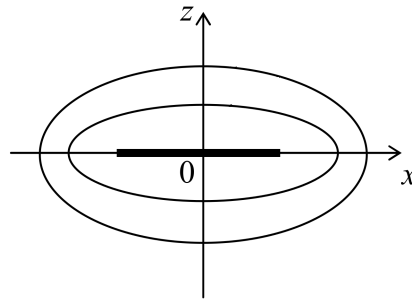
Supongamos que el conductor está a un potencial  $\phi = V$  respecto del potencial en puntos muy lejanos (en el infinito). Podemos fijar como referencia  $\phi = 0$  en el infinito, para mayor simplicidad. Entonces el problema a resolver es

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 & \text{(fuera del conductor)} \\ \phi = V & \text{(borde del conductor)} \\ \phi = 0 & \text{(en infinito)} \end{cases} \quad (5)$$

### Cálculo del potencial

Podemos imaginar que un disco conductor es un sólido en forma de “pastilla” (formalmente se llama elipsoide oblado) que se lo aplastó hasta hacerlo infinitamente delgado. La superficie de un elipsoide oblado se puede describir como

$$\frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2} = 1 \quad (6)$$



donde la relación entre los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  representa el nivel de “aplastamiento” de la “pastilla”. Si  $\alpha = \beta$  tenemos una esfera, mientras que si  $\beta \ll \alpha$  obtenemos un “aplastamiento” en la coordenada  $z$ . Cuando  $\beta \rightarrow 0$ , los valores posibles de  $z$  también deberán hacerse infinitamente pequeños (de manera que se siga cumpliendo la relación (6)) y obtendremos un disco plano.

La solución del problema planteado en (5) se simplifica mucho si logramos expresar las ecuaciones en un sistema de coordenadas en el que el potencial sea constante a lo largo de una única coordenada, o lo que es lo mismo, que el campo  $\mathbf{E}$  tenga una sola componente, o bien, que la distribución de cargas  $\sigma$  (fuente del campo  $\mathbf{E}$ ) dependa de una sola coordenada. Por ejemplo, si elegimos un sistema de coordenadas de tipo esférico

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{\alpha} = \text{sen } \theta \cos \varphi \\ \frac{y}{\alpha} = \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ \frac{z}{\beta} = \cos \theta \end{array} \right. \quad (7)$$

( $\theta$  es el ángulo polar(vertical) y  $\varphi$  es el ángulo azimutal(horizontal)) la simetría del problema hace que la solución no dependa de  $\varphi$ . Sin embargo, sí puede depender de  $\theta$  según lo lejos que nos posicionemos del disco. Si nos posicionamos muy próximos a la superficie (plana) del disco, éste se percibirá como muy extenso, y por lo tanto, el campo eléctrico será prácticamente vertical (en  $\hat{z}$ ). En cambio, si nos posicionamos muy lejos, el disco se percibirá como una carga puntual, y por lo tanto, el campo eléctrico será prácticamente radial.

Para evitar la dependencia en la coordenada  $\theta$ , debemos “corregir” el sistema esférico, de manera de “aplastarlo un poco” para que siga el contorno del conductor. Esto se puede hacer eligiendo  $\alpha = a \cosh r$  y  $\beta = a \sinh r$ , de manera que el sistema de coordenadas sea

$$\left\{ \begin{array}{l} x = a \cosh r \text{sen } \theta \cos \varphi \\ y = a \cosh r \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ z = a \sinh r \cos \theta \end{array} \right. \quad (8)$$

Este sistema de referencia es de tipo *elipsoidal oblado*. Observemos que si la distancia radial  $r \rightarrow 0$ , entonces, describe un disco plano de radio  $a$ . Si  $r \gg 1$  describe una esfera. Esto es justamente lo que nos interesa. Podemos suponer que en este sistema coordenado, el campo eléctrico solo tendrá componente  $\mathbf{E} = E_r \hat{\mathbf{r}}$  (o sea  $E_\theta = E_\varphi = 0$ ). Además, como  $\mathbf{E}$  indica la dirección en que varía el potencial, observamos que sólo varía en la dirección  $r$ , independientemente de las coordenadas  $\theta$  y  $\varphi$ . Por lo tanto, podemos asegurar que  $\phi = \phi(r)$ .

La solución del problema se simplificó mucho por medio de la transformación propuesta en (8). El único cuidado que hay que tener a partir de ahora es en escribir correctamente los elementos diferenciales en el nuevo sistema. Por ejemplo, un elemento diferencial de camino ahora vale

$$d\mathbf{l} = h_r dr \hat{\mathbf{r}} + h_\theta d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + h_\varphi d\varphi \hat{\boldsymbol{\varphi}} \quad (9)$$

donde los factores de escala  $h_r$ ,  $h_\theta$  y  $h_\varphi$  se obtienen a partir de la transformación (8) y de considerar que  $(d\mathbf{l})^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 = (h_r dr)^2 + (h_\theta d\theta)^2 + (h_\varphi d\varphi)^2$ . Resulta

$$h_r = h_\theta = a\sqrt{\cosh^2 r - \sin^2 \theta} \quad , \quad h_\varphi = a \cosh r \sin \theta \quad (10)$$

Analizamos ahora el planteo (5) en este sistema de coordenadas. Sabemos que el problema tiene simetría en  $\varphi$ , por lo que esperamos que el campo eléctrico, a lo más, sea una función  $\mathbf{E} = E_r(r, \theta) \hat{\mathbf{r}}$ . El flujo de este campo a través de un elemento de superficie normal a  $\hat{\mathbf{r}}$  vale

$$\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E_r(r, \theta) ds = E_r(r, \theta) h_\theta h_\varphi d\theta d\varphi \quad (11)$$

Pero sabemos que se debe cumplir, según el planteo (5), que  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ . Es decir, que el flujo (que sólo existe en la dirección  $\hat{\mathbf{r}}$ ) debe permanecer constante a lo largo de  $\hat{\mathbf{r}}$ . Si no fuera así, habría una fuente de campo, contraviniendo la condición de divergencia nula.

Se deduce a partir de (11) que  $E_r(r, \theta) h_\theta h_\varphi$  sólo puede ser una función (a lo sumo) de  $\theta$ , pero no de  $r$ . Entonces,  $E_r(r, \theta) h_\theta h_\varphi = f(\theta)$ .

Por otro lado, la relación (1) muestra que la variación infinitesimal del potencial en la dirección  $r$  es

$$d\phi = -E_r h_r dr \quad \text{siendo} \quad d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr \quad (12)$$

considerando que no hubo cambios en las demás coordenadas ( $d\theta = d\varphi = 0$ ). Por lo tanto, si combinamos esto último con lo que sabemos del campo eléctrico resulta la relación

$$-\frac{1}{h_r} \frac{\partial \phi}{\partial r} h_\theta h_\varphi = f(\theta) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{f(\theta)}{h_\varphi} = \frac{A}{\cosh r} \quad (13)$$

donde toda dependencia en  $\theta$  debida a  $h_\varphi$ , más  $f(\theta)$ , fue absorbido por la constante  $A$ . Esto es posible dado que habíamos anticipado que  $\phi = \phi(r)$ , y por lo tanto, no puede depender de  $\theta$ .

El potencial resulta inmediato a partir de ahora, ya que integrando da

$$\phi(r) = A \int \frac{\cosh r}{\cosh^2 r} dr = A \left[ \arctan(\sinh r) + B \right] \quad (14)$$

(se realizó la sustitución  $u = \sinh r$  y se usó la identidad  $\cosh^2 r = 1 + \sinh^2 r$  en el denominador).

Evaluamos las constantes a partir de las condiciones de borde de (5). Como el potencial vale  $\phi = V$  en el borde del conductor, es decir en el disco plano, entonces,  $\phi(r \rightarrow 0) = V$ . Recordemos que para  $r \rightarrow 0$ , los parámetros  $\alpha$  y  $\beta$  tienden a 1 y 0, respectivamente. En esa situación, el elipsoide “colapsa” hacia un disco plano de radio  $a$ . De acuerdo con (14) obtenemos que  $A.B = V$ . En cambio, cuando  $r \rightarrow \infty$ ,  $\arctan(\sinh r) \rightarrow \pi/2$ . De acuerdo con (14), el potencial es nulo en ese caso y resulta la condición  $AB + A\pi/2 = 0$ . La solución es entonces

$$\phi(r) = V \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctan(\sinh r) \right] \quad (15)$$

### Cálculo de la distribución de carga

Para hallar la distribución de carga debemos obtener primero el campo  $\mathbf{E}$  en la superficie del disco, según establece (4). Pero, a partir de (12) resulta

$$E_r = -\frac{1}{h_r} \frac{d\phi}{dr} = \frac{2}{\pi} \frac{V}{a\sqrt{\cosh^2 r - \sinh^2 \theta}} \frac{\cosh r}{1 + \sinh^2 r} \quad (16)$$

Sobre la superficie del disco, es decir cuando  $r \rightarrow 0$ , el campo vale

$$E_r \Big|_{\text{sup}} = \frac{2V}{a\pi \cos \theta} \quad (17)$$

Recordemos que si  $r \rightarrow 0$ , de la transformación de coordenadas (8) se deduce que

$$x^2 + y^2 = a^2 \sin^2 \theta = a^2 (1 - \cos^2 \theta) \quad (18)$$

y llamando  $\rho^2 = x^2 + y^2$  se obtiene que la distribución de carga total vale

$$\sigma_{\text{total}} = 2\sigma = \frac{4\epsilon_0 V}{\pi} \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \quad (19)$$

El hecho de que la distribución total valga  $2\sigma$  se debe a que al “colapsar” la cara superior (con carga  $\sigma$ ) y la inferior del elipsoide (también con carga  $\sigma$ ), ambas distribuciones (idénticas) se suman.

**(a) ¿Dónde observa una mayor acumulación de cargas? Explique por qué.**

La mayor acumulación de carga se encuentra cercana al radio  $a$  del disco. Esto se puede explicar del siguiente modo: si el disco fuera infinitamente extenso, una distribución de carga uniforme generaría un campo perpendicular al plano cargado. La superficie de carga (ortogonal al campo eléctrico) coincidiría con una superficie equipotencial. Sin embargo, al no ser el disco infinitamente extenso, las contribuciones debidas a radios mayores que el disco, desaparecerían. La única forma de compensar esta “ausencia” de cargas, manteniendo inalterable el campo eléctrico, es acumulando más carga cerca del borde, de tal forma que el campo eléctrico permanezca ortogonal a la superficie.

**(b) Compare la distribución de cargas hallada con el modelo del anillo cargado uniformemente. ¿Encuentra alguna similitud?**

La distribución  $\sigma_{\text{total}}$  se concentra en la región cercana al borde del disco. El caso del anillo uniformemente cargo puede verse como una situación extrema en la que toda la carga se concentra en  $\rho = a$ . Más aún, el potencial generado por un anillo cargado en cualquier punto  $\rho < a$  y  $z = 0$  es (cfr. Jackson 2°ed., pág. 64)

$$\phi_{\text{anillo}} \simeq V \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 + \frac{9}{64} \left( \frac{\rho}{a} \right)^4 + \frac{25}{256} \left( \frac{\rho}{a} \right)^6 + \dots \right] \quad (20)$$

El potencial del anillo es prácticamente constante, con una primera corrección de orden cuadrático. El potencial de un disco uniformemente cargado vale

$$\phi_{\text{uniforme}} \simeq V \left[ 1 - \frac{1}{4} \left( \frac{\rho}{a} \right)^2 - \frac{3}{32} \left( \frac{\rho}{a} \right)^4 + \dots \right] \quad (21)$$

Curiosamente, la corrección de segundo orden de un disco uniforme es similar a la del anillo (con el signo cambiado). El signo en la corrección de segundo orden se relaciona con la componente del campo eléctrico que es paralela al disco (tangencial a la superficie del disco). En el caso del anillo, existe una componente  $E_{\rho} \hat{\rho}$  apuntando hacia el centro del anillo, mientras que en el disco uniformemente cargado, tiene sentido opuesto. La distribución en el anillo es excesivamente intensa, generando una componente tangencial entrante, mientras que en disco uniforme, no alcanza con la cantidad de carga en el borde para mantener un campo eléctrico completamente ortogonal a la superficie.

**(c) ¿En qué región del espacio es posible ignorar los “efectos de borde”? En ese caso, un disco cargado uniformemente ¿se parece a un conductor perfecto?**

Comparando las correcciones a segundo orden para el anillo y para el disco uniforme, observamos que siempre que  $\rho \ll 2a$  es posible ignorar los efectos de borde. Por ejemplo, si no queremos cometer errores mayores al 10% en el potencial, entonces el punto de observación no podrá apartarse más allá de  $\rho_{\max} = 0,63 a$ .