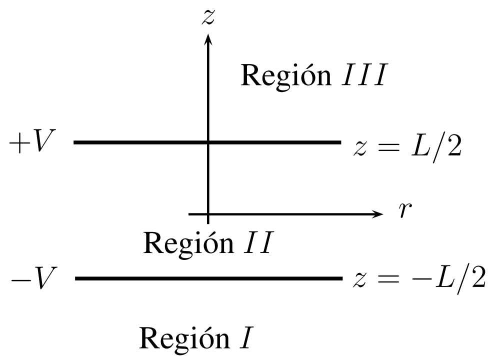
Capacitor de placas circulares - solución completa

Vamos a calcular el potencial electrostático en todo el espacio para un capacitor de placas circulares y paralelas. Las placas conductoras están ubicadas en $z = \pm l/2$, donde la placa superior tiene potencial V y la inferior $-V$.



Para resolver el problema a través de la ecuación de Laplace, separamos el problema en tres regiones: (I) $z < -l/2$, (II) $|z| < l/2$ y (III) $z > l/2$.

Las condiciones de contorno que debe verificar el potencial son las siguientes:

1. Potencial finito cuando $|z| \to \infty$ (1.A) y $r = 0$ (1.B).
2. Potencial continuo para todo r en $z = l/2$ (2.A) y $z = -l/2$ (2.B).
3. Potencial sobre los discos: $\Phi(z = l/2) = V$ (3.A) y $\Phi(z = -l/2) = -V$ (3.B).
4. Derivada normal continua si $r > a$: $\left[\partial_z \Phi^{II} - \partial_z \Phi^{III}\right]_{z=l/2} = 0$ (4.A) y $\left[\partial_z \Phi^{I} - \partial_z \Phi^{II}\right]_{z=-l/2} = 0$ (4.B).
5. Discontinuidad de la derivada normal si $r < a$. Esto da la carga inducida sobre las placas del capacitor.

La condición (5) no es útil porque, de antemano, no se conoce cuál es la carga sobre las placas conductoras. Pero además, no es posible imponer simultáneamente una condición de Dirichlet y una de Neumann a un contorno, ya que la cantidad de carga en el conductor dependerá del potencial al que se lo fije.

El potencial más general que se puede proponer es el siguiente:

$$\Phi_{k\nu}(\mathbf{r}) = \left[\alpha_\nu J_\nu(kr) + \beta_\nu N_\nu(kr)\right] \left[A_\nu e^{\imath\nu\theta} + B_\nu e^{-\imath\nu\theta}\right] \left[A_k e^{kz} + B_k e^{-kz}\right]$$

Como el problema tiene simetría de rotación el potencial debe ser independiente de θ, entonces $\nu = 0$. Además, como no hay condiciones de contorno nulas ni en la dirección vertical ni en la radial, los valores que toma k son continuos. El potencial electrostático entonces resulta:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk\ [\alpha_0 J_0(kr) + \beta_0 N_0(kr)] \left[A(k)e^{kz} + B(k)e^{-kz}\right]$$

Hay tres familias de coeficientes incógnitas a determinar: $\{\alpha_0, \beta_0; A(k), B(k)\}$ en cada región del espacio separado por las placas. Las condiciones de contorno irán determinando cada una de estos coeficientes.

1. Potencial finito:

(1.A) cuando $|z| \to \infty$, entonces: $A^{III}(k) = B^I(k) = 0$;

(1.B) cuando $r = 0$, entonces: todos los β_0 se anulan.

El potencial es entonces:

$$\Phi^{III}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk\, B^{III}(k)e^{-kz}\, J_0(kr) \qquad ,\ z > l/2 \tag{1}$$

$$\Phi^{II}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk\ \left[A^{II}e^{kz} + B^{II}(k)e^{-kz}\right]\ J_0(kr) \qquad ,\ |z| < l/2 \tag{2}$$

$$\Phi^{I}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk\, A^{I}(k)e^{kz}\, J_0(kr) \qquad ,\ z < -l/2$$

2. Potencial continuo:

(2.A) en $z = l/2$

$$\int_0^\infty dk\, B^{III}(k)e^{-kl/2}\, J_0(kr) = \int_0^\infty dk\ \left[A^{II}e^{kl/2} + B^{II}(k)e^{-kl/2}\right]\ J_0(kr)$$

Igualando a cero y usando la relación de ortogonalidad de las funciones de Bessel tenemos que

$$\left\{\int_0^\infty dk\ \left[B^{III}(k)e^{-kl/2} - A^{II}e^{kl/2} - B^{II}(k)e^{-kl/2}\right]\ J_0(kr) = 0\right\} \int_0^\infty dr\, r\, J_0(k'r)$$
$$\int_0^\infty dk\, \frac{1}{k}\, \delta(k-k')\ \left[B^{III}(k)e^{-kl/2} - A^{II}e^{kl/2} - B^{II}(k)e^{-kl/2}\right]\ J_0(kr) = 0$$

Entonces: $B^{III}(k) = A^{II}(k)e^{kl} + B^{II}(k)$.

(2.B) De la misma manera se muestra que $A^I(k) = A^{II}(k) + B^{II}(k)e^{kl}$.

Re-escribiendo el potencial tenemos:

$$\Phi^{III}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk \left[A^{II}(k)e^{k(l-z)} + B^{II}(k)e^{-kz}\right] J_0(kr) \quad , \; z > l/2 \tag{3}$$

$$\Phi^{II}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk \left[A^{II}(k)e^{kz} + B^{II}(k)e^{-kz}\right] J_0(kr) \quad , \; |z| < l/2 \tag{4}$$

$$\Phi^{I}(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk \left[A^{II}(k)e^{kz} + B^{II}(k)e^{k(l+z)}\right] J_0(kr) \quad , \; z < -l/2$$

Desde ahora los coeficientes a determinar son $A(k)$ y $B(k)$ (se deja de lado el supra-índice II).

3. y 4. Potencial sobre los discos para $r < a$ y densidad de carga nula para $r > a$.

(3.A)

$$\Phi(z = l/2) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dk \left[A(k)e^{kl/2} + B(k)e^{-kl/2}\right] J_0(kr) = V & , \quad r < a \\ \\ \displaystyle\int_0^\infty k\, dk\, A(k)e^{kl/2}\, J_0(kr) = 0 & , \quad r > a \end{cases} \tag{5}$$

(3.B)

$$\Phi(z = -l/2) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dk \left[A(k)e^{-kl/2} + B(k)e^{kl/2}\right] J_0(kr) = -V & , \quad r < a \\ \\ \displaystyle\int_0^\infty k\, dk\, B(k)e^{kl/2}\, J_0(kr) = 0 & , \quad r > a \end{cases} \tag{6}$$

Tenemos aparentemente dos sistemas duales de ecuaciones integrales. Esto es “aparente” porque (3.A) y (3.B) son formalmente el mismo sistema dual. Por ejemplo, si en (3.B) llamamos $B(k) = -A'(k)$ y $A(k) = -B'(k)$, este sistema resulta

$$\Phi(z=-l/2) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dk\, \left[A'(k)e^{kl/2} + B'(k)e^{-kl/2}\right] J_0(kr) = V & , \quad r < a \\ \\ \displaystyle\int_0^\infty k\, dk\, A'(k)e^{kl/2}\, J_0(kr) = 0 & , \quad r > a \end{cases} \tag{7}$$

que es identico a (3.A) pero con las incógnitas $A'(k), B'(k)$ en lugar de $A(k), B(k)$. Si pretendemos que ambos sistemas (el 3.A y el 3.B) se cumplan simultáneamente, debemos identificar $A'(k) = A(k)$ y $B'(k) = B(k)$. Por lo tanto, debe ser $A(k) = -B(k)$. Esto resulta lógico ya que la solución entre las placas debe ser impar debido a la simetría del problema. El problema matemático se reduce, por lo tanto, a poder determinar la solución del único sistema dual de ecuaciones integrales

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty dk\, A(k)\, \sinh(kl/2)\, J_0(kr) = V/2 & , \quad r < a \\ \\ \displaystyle\int_0^\infty dk\, k\, A(k) e^{kl/2}\, J_0(kr) = 0 & , \quad r > a \end{cases} \tag{8}$$

Llamando $C(k) = k\, A(k) e^{kl/2}$ y adimensionalizando las variables por medio del cambio $u = ka$ resulta

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{u}\, \frac{C(u/a)}{V} \left[1 - e^{-ul/a}\right] J_0(ur/a) = 1 & , \quad \dfrac{r}{a} < 1 \\ \\ \displaystyle\int_0^\infty du\, \frac{C(u/a)}{V}\, J_0(ur/a) = 0 & , \quad \dfrac{r}{a} > 1 \end{cases} \tag{9}$$

Sneddon muestra que este sistema tiene solución y que ésta vale

$$\frac{C(u/a)}{V} = \frac{2u}{\pi} \int_0^1 f(t)\, \cos(ut)\, dt \tag{10}$$

donde

$$f(t) = 1 + \int_{-1}^1 dx \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n K_n(t,x)\right] \tag{11}$$

y $K_n(t,x)$ son funciones que se obtienen por recurrencia del siguiente modo

$$K_1(t,x) = \frac{1}{\pi} \frac{l/a}{(l/a)^2 + (t-x)^2} \quad , \quad K_n(t,x) = \int_{-1}^1 dx'\, K_1(t,x')\, K_{n-1}(x',x) \tag{12}$$

para $n > 1$. Esta es una solución formal al problema, pero de difícil implementación práctica. Una primera aproximación es aquella en que suponemos que $l \gg a$ (las placas esán muy alejadas respecto de su radio). En ese caso $f(t) = 1$ y resulta la solución cerrada

$$C(u) = \frac{2\,V}{\pi}\,\text{sen}\,(ua) \qquad \Rightarrow \qquad A(k) = \frac{2\,V}{\pi}\,\frac{\text{sen}\,(ka)}{k}\,e^{-kl/2} \simeq \frac{2\,V}{\pi}\,\frac{\text{sen}\,(ka)}{k} \tag{13}$$

donde esta última coincide con la solución de un único disco en el espacio ($l \to \infty$).