Problema de dos cargas en movimiento circular

Problema

Dos cargas iguales efectúam un movimiento circular uniforme con frecuencia ω y radio de curvatura a. Ambas están separadas un ángulo π. Calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la aproximación de campo lejano ($a \ll r$). Obtener el valor medio temporal de la distribución de potencia total, y la intensidad total irradiada por ciclo.

Primera solución: por medio del campo de Liénard-Wiechert

El campo de radiación de una partícula con carga q, según el desarrollo de Liénard-Wiechert es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{cr} \left. \frac{\hat{r} \times [(\hat{r} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \hat{r} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right|_{\mathbf{ret}} \tag{1}$$

donde se usó la aproximación de campo lejano $\hat{\mathbf{n}} \simeq \hat{r}$. El tiempo retardado es $t - r/c$. Además, para obtener el campo magnético sólo hay que calcular $\mathbf{B}_{\text{rad}} \simeq \hat{r} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}$ (en la aproximación de campo lejano).

Como el movimiento de cada partícula es circular uniforme, entonces cada una tendrá una velocidad tangencial ωa y una aceleración normal $\omega^2 a$ (en módulo). Pero ambas están separadas por un ángulo π. Por lo tanto, si llamamos

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t) &= -\text{sen}(\omega t)\, \hat{x} + \cos(\omega t)\, \hat{y} \\ \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) &= \cos(\omega t)\, \hat{x} + \text{sen}(\omega t)\, \hat{y} \end{aligned}$$

las velocidades y aceleraciones de cada partícula (1 y 2 respectivamente) son

$$1 = \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \dfrac{\omega a}{c}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \hat{r} \cdot \boldsymbol{\beta} = \dfrac{\omega a}{c}\, [\hat{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t)] \\ \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dfrac{\omega^2 a}{c}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \hat{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = -\dfrac{\omega^2 a}{c}\, [\hat{r} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t)] \quad , \quad \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\omega^3 a^2}{c^2}\, \hat{z} \end{cases} \tag{2}$$

$$2 = \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = -\dfrac{\omega a}{c}\, \hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \hat{r} \cdot \boldsymbol{\beta} = -\dfrac{\omega a}{c}\, [\hat{r} \cdot \hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t)] \\ \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\omega^2 a}{c}\, \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) \quad \Rightarrow \quad \hat{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\omega^2 a}{c}\, [\hat{r} \times \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t)] \quad , \quad \boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}} = \dfrac{\omega^3 a^2}{c^2}\, \hat{z} \end{cases} \tag{3}$$

Con estos resultados podemos evaluar la ec. (1). El denominador de esa expresión puede expandirse en una serie

$$\frac{1}{(1-\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta})^3} \simeq 1 + 3\,(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta}) + \ldots \tag{4}$$

El primer término de la expansión corresponde a una aproximación *no* relativista. El segundo término corresponde a la primera corrección relativista debida al cambio de sistema de referencia de la partícula por el del observador (laboratorio).

Los campos debidos a las partículas 1 y 2 en términos de las velocidades y aceleraciones ($\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$) de la partícula 1, resultan

$$\mathbf{E}^{(1)}_{\rm rad} \simeq \frac{q}{cr}\left[1 + 3\,(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\right]\left[\hat{r}\times[(\hat{r}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\right]_{\mathbf{ret}} \tag{5}$$

$$\tag{6}$$

$$\mathbf{E}^{(2)}_{\rm rad} \simeq \frac{q}{cr}\left[-1 + 3\,(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta})\right]\left[\hat{r}\times[(\hat{r}+\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]\right]_{\mathbf{ret}} \tag{7}$$

Sumando ambos campos se obtiene

$$\mathbf{E}_{\rm rad} \simeq -\frac{2q}{cr}\left[\hat{r}\times(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})]\right|_{\mathbf{ret}} + \frac{3q}{cr}\,(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta})[\hat{r}\times(\hat{r}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})]\Big|_{\mathbf{ret}} \tag{8}$$

Observar que en esta última expresión, los valores de $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ pueden ser tanto los de la partícula 1 como los de la partícula 2 porque los cambios de signo que surgen de usar unas u otras se compensan.

Además, es muy importante notar que esta expresión separa dos efectos relativistas diferentes[1]. En el primer sumando, sólo se toma en cuenta la diferencia en la dirección entre $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ (a traves del producto vectorial entre ambas magnitudes). En cambio, el segundo término sólo toma en cuenta la corrección relativista debida al cambio de sistema de referencia de la partícula por el sistema del observador (sin importar la difrerencia de dirección entre $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$).

Si la partícula fuera *no* relativista ($\beta \ll 1$), ambos sumandos en la expresión (8) se anularían ya que dependen (en módulo) de $\beta\,\dot{\beta} \sim \beta^3 \to 0$. Por lo tanto, la solución de Liénard-Wiechert *no* relativista (en este caso) no resulta satisfactoria debido a que predice que $\mathbf{E}_{\rm rad} = 0$.

El problema con la solución *no* relativista de Liénard-Wiechert es que el campo emitido por cada partícula es el de un dipolo eléctrico. Efectivamente, el campo de radiación del momento dipolar eléctrico de una carga q es

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \mathbf{B}_{\rm rad}\times\hat{r}\,\Big|_{\rm ret} = \frac{\ddot{\mathbf{p}}\times\hat{r}}{c^2 r}\times\hat{r}\,\Big|_{\rm ret} = \frac{1}{c^2 r}\left[\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{\mathbf{p}})\right]_{\rm ret} \tag{9}$$

y como el momento dipolar eléctrico vale $\mathbf{p} = qa\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t)$, entonces $\dot{\mathbf{p}}/c = q\boldsymbol{\beta}$ y $\ddot{\mathbf{p}}/c = q\dot{\boldsymbol{\beta}}$. El campo de radiación corresponderá a la expresión de Liénard-Wiechert cuando $\beta \to 0$

[1]Cfr. *Classical Electrodynamics*, Jackson (2° edition), p.662.

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \frac{q}{cr}\left[\hat{r}\times(\hat{r}\times\dot{\boldsymbol{\beta}})\right]_{\bf ret} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{E}^{(1)}_{\rm rad} + \mathbf{E}^{(2)}_{\rm rad} = 0 \tag{10}$$

Cuando se suman los campos debidos a las partículas 1 y 2, el resultado es nulo (en el límite *no* relativista). Se puede comprobar que, dado que ambas partículas son iguales, el momento dipolar total es nulo. Consecuentemente, el límite *no* relativista de Liénard-Wiechert sólo aporta la contribución dipolar eléctrica de los campos.

Si las partículas son relativistas hay que tomar en cuenta los dos sumandos de (8). Por un lado, es inmediato que $c^2(\boldsymbol{\beta}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) = \omega^3 a^2\,\hat{z}$, $c(\hat{r}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}) = -(\omega^2 a)\,(\hat{r}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}')$ y que $c(\hat{r}\cdot\boldsymbol{\beta}) = \omega a(\hat{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}')$. Los versores rotantes $\hat{\boldsymbol{\rho}}'$ y $\hat{\boldsymbol{\varphi}}'$ se escriben en coordenadas esféricas como

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) &= \operatorname{sen}\theta\,\cos(\varphi-\omega t)\,\hat{r} + \cos\theta\,\cos(\varphi-\omega t)\,\hat{\theta} - \operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi} \\
\hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t) &= \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\,\hat{r} + \cos\theta\,\operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\,\hat{\theta} + \cos(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi}
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\hat{r}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}' &= \cos\theta\,\cos(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi} + \operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\,\hat{\theta} \\
\hat{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}' &= \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}(\varphi-\omega t)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{r}\times(\hat{r}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}') = -\cos\theta\,\cos(\varphi-\omega t)\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi}$$

y, por lo tanto, $(\hat{r}\cdot\hat{\boldsymbol{\varphi}}')[\hat{r}\times(\hat{r}\times\hat{\boldsymbol{\rho}}')] = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\,\cos\theta\,\operatorname{sen}[2(\varphi-\omega t)]\,\hat{\theta} + \operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}^2(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi}$.

Si observamos que $\operatorname{sen}^2(\varphi-\omega t)\,\hat{\varphi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos[2(\varphi-\omega t)]$ deducimos que la frecuencia de radiación ya no es la misma con la que rotan las cargas, sino que se duplicó. Las expresiones finales de los campos de radiación resultan

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \frac{q}{r}\left(\frac{\omega^3 a^2}{c^3}\right)\operatorname{sen}\theta\left[\frac{1}{2}\,\hat{\varphi} + \frac{3}{2}\,\cos\theta\,\operatorname{sen}[2(\varphi-\omega t)]\,\hat{\theta} + \frac{3}{2}\,\cos[2(\varphi-\omega t)]\,\hat{\varphi}\right]_{\bf ret} \tag{11}$$

$$\langle|\mathbf{E}_{\rm rad}|^2\rangle = \left(\frac{3}{2}\,\frac{q}{r}\,\frac{\omega^3 a^2}{c^3}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\left[\frac{1}{9} + \frac{1+\cos^2\theta}{2}\right] \tag{12}$$

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle = \frac{9}{4}\,\frac{c}{4\pi}\left(\frac{q\,\omega^3 a^2}{c^3}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\left[\frac{1}{9} + \frac{1+\cos^2\theta}{2}\right] \tag{13}$$

Este último resultado es sugestivo. La potencia irradiada por unidad de ángulo sólido tiene dos contribuciones. Por un lado, hay una contribución que varía como $\operatorname{sen}^2\theta$ y es similar al patrón característico de un dipolo magnético vertical (dirección $\hat{z}$) ubicado en el origen de coordenadas. Por otro lado, vemos una contribución $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta(1+\cos^2\theta)$ que es característica de una distribución cuadrupolar eléctrica debida a dos cargas rotantes en el plano horizontal (ver más adelante). Las potencias en ω concuerdan con el orden de aproximación del dipolo magnético y el cuadripolo eléctrico. Por lo tanto, la radiación observada (relativista) se presenta en un segundo orden de aproximación (ya que el primer orden hubiera sido una contribución dipolar eléctrica) y es equivalente a una corriente variable circulando por el plano horizontal.

Segunda solución: por medio de fuentes armónicas

Otra forma de encontrar los campos de radiación es a partir del potencial vector, considerando que la densidad de corriente es armónica. Es decir, podemos escribir el potencial vector en la aproximación *no* relativista (y en campo lejano) como

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{c} \frac{\mathbf{v}_i}{r}\bigg|_{\mathbf{ret}} \quad , \quad \mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', \mathbf{t}_{\text{ret}})}{r} \, d^3 r' \tag{14}$$

donde $\mathbf{v}_i$ y $\mathbf{J}(\mathbf{r}', \mathbf{t}_{\text{ret}})$ son fuentes armónicas discretas y continuas, respectivamente. En este caso, tenemos dos cargas iguales con trayectorias

$$\mathbf{r}'(t) = \pm a \, \cos(\omega t) \, \hat{x} \pm a \operatorname{sen}((\omega t) \, \hat{y} = \operatorname{Re}\{\pm a(\hat{x} + i \, \hat{y}) \, e^{-i\omega t}\} \tag{15}$$

La última expresión muestra que es posible expresar ambas trayectorias como una fuente armónica. Pero hay que ser cuidadoso porque el tiempo retardado *no* es el mismo en ambas cargas. Para recordar que no son iguales, escribiremos como t' y t'' a los respectivos tiempos retardados. La velocidad (armónica) será $\dot{\mathbf{r}}'(t)$, por lo que el potencial vector es

$$\mathbf{A} = -i \, \frac{q\omega a}{cr} \, (\hat{x} + i \, \hat{y}) \, (e^{-i\omega t'} - e^{-i\omega t''}) \tag{16}$$

Dado que estamos en campo lejano ($a \ll r$), la distancia desde el punto fuente al punto de observación se puede aproximar a primer orden como

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r - \hat{r} \cdot \mathbf{r}' \tag{17}$$

En el caso de las dos partículas rotantes, sabemos que su posición en cada instante es $\pm a \hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t)$. Por lo tanto, si recordamos que $\hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) = \operatorname{sen}\theta \, \cos(\varphi - \omega t) \, \hat{r} + \cos\theta \, \cos(\varphi - \omega t) \, \hat{\theta} - \operatorname{sen}(\varphi - \omega t) \, \hat{\varphi}$, las distancias entre las cargas y el punto de observación será

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \simeq r \mp a \operatorname{sen}\theta \, \cos(\varphi - \omega t) \tag{18}$$

y los respectivos tiempos de retardo serán

$$\begin{aligned} t' &= t - \frac{|\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\rho}}'|}{c} = t - \frac{r}{c} + \frac{a}{c} \operatorname{sen}\theta \, \cos(\varphi - \omega t) \\ t'' &= t - \frac{|\mathbf{r} - \hat{\boldsymbol{\rho}}''|}{c} = t - \frac{r}{c} - \frac{a}{c} \operatorname{sen}\theta \, \cos(\varphi - \omega t) \end{aligned}$$

Sumando ambas expresiónes en la ec. (19) se obtiene

$$\mathbf{A} = -2 \, \frac{q\omega a}{cr} \, (\hat{x} + i \, \hat{y}) \, e^{i(kr - \omega t)} \operatorname{sen}[ka \operatorname{sen}\theta \, \cos(\varphi - \omega t)] \tag{19}$$

donde $k = \omega/c$. Pero como estamos trabajando en la aproximación *no* relativista, entonces $ka \ll 1$. Por lo tanto, en la expresión (19) es válida la aproximación $\operatorname{sen} x \simeq x$. El potencial vector resulta

$$\mathbf{A} = -2\,\frac{q\omega a}{cr}\,(\hat{x} + i\,\hat{y})\,e^{i(kr-\omega t)}\,ka\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos(\varphi - \omega t) \tag{20}$$

y cuya parte real es $\mathbf{A} = -2\,\dfrac{q}{r}\,k^2a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\cos(\varphi - \omega t)[\cos(kr - \omega t)\,\hat{x} - \mathrm{sen}\,(kr - \omega t)\,\hat{y}]$

El término entre corchetes es equivalente a $\hat{\boldsymbol{\rho}}(\omega t - kr)$. Si se los deriva respecto del tiempo, valdrá $\omega\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega t - kr)$. Por lo tanto, el campo de radiación será

$$\mathbf{B}_{\mathrm{rad}} \simeq= \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}} \times \hat{r}) = -2\,\frac{q}{r}\,k^3a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,[\,\mathrm{sen}\,(\varphi - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{\rho}}(\omega t - kr) + \cos(\varphi - \omega t)\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(\omega t - kr)] \times \hat{r} \tag{21}$$

Podemos identificar fácilmente el campo eléctrico de radiación y calcular la potencia irradiada como

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = -\frac{2q}{r}\,k^3a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\cos\theta\,\mathrm{sen}\,[2(\omega t - \varphi) - kr]\,\hat{\theta} - \cos[2(\omega t - \varphi) - kr]\,\hat{\varphi}\right] \tag{22}$$

$$|\mathbf{E}_{\mathrm{rad}}|^2 = \frac{4q^2}{r^2}\,(k^3a^2)^2\,\mathrm{sen}^2\theta\left[\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2[2(\omega t - \varphi) - kr] + \cos^2[2(\omega t - \varphi) - kr]\right] \tag{23}$$

$$\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle = 4\,\frac{c}{4\pi}\left(\frac{q\omega^3a^2}{c^3}\right)^2\mathrm{sen}^2\theta\,\frac{1 + \cos^2\theta}{2} \tag{24}$$

¿Qué interpretación se puede hacer de este resultado?

La potencia irradiada por unidad de ángulo sólido contiene un factor $\frac{1}{2}(1 + \cos^2\theta)$ que corresponde a la contribución dipolar eléctrica de una carga en movimiento circular uniforme. Efectivamente, si calculamos el campo irradiado por una sola carga en la aproximación *no* relativista, podemos usar la expresión *no* relativista

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{q}{cr}\,[\hat{r} \times (\hat{r} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})]\Big|_{\mathbf{ret}} = -\frac{q\omega^2a}{c^2r}\left[\hat{r} \times [\cos(\omega t')\,(\hat{r} \times \hat{x}) + \mathrm{sen}\,(\omega t')\,(\hat{r} \times \hat{y})]\right]_{\mathbf{ret}} \tag{25}$$

que resulta en la expresión

$$\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} = \frac{q\omega^2a}{c^2r}\left[\cos\theta\,\cos(\varphi - \omega t')\,\hat{\theta} - \mathrm{sen}\,(\varphi - \omega t')\,\hat{\varphi}\right]_{\mathbf{ret}} \tag{26}$$

En la solución de Liénard-Wiechert se había comentado que clásicamente $\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}} + \mathbf{E}^{(2)}_{\mathrm{rad}} = 0$ porque ambas cargas estaban en contrafase. La aproximación *no* relativista de Liénard-Wiechert era capaz de aportar únicamente la contribución dipolar eléctrica total al campo (en este caso, nula). Sin embargo, en la solución actual se introdujo la interferencia entre las cargas (o fuentes armónicas). La suma de los campos debe realizarse teniendo en cuenta la diferencia de camino recorrido por la señal que se propaga. Es decir, si existe una diferencia de fase α entre $\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}}$ y $\mathbf{E}^{(2)}_{\mathrm{rad}}$ debido a la diferencia de camino, entonces la suma de ambos campos debe ser

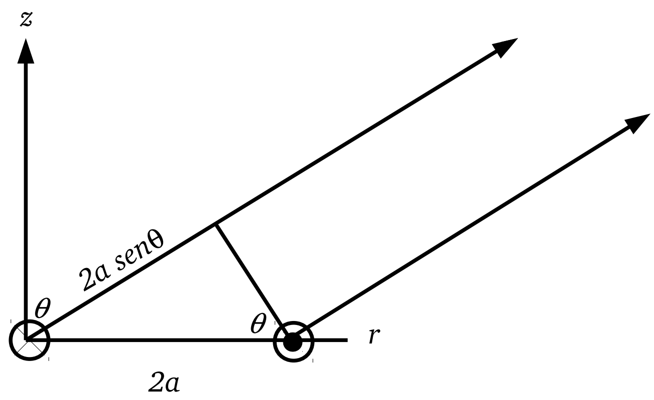

Fig. 1: Señal emitida por cada carga. Las cargas están en contrafase y están separadas una distancia $2a$. La diferencia de camino entre las dos seãles es $2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Observar que el eje $\hat{z}$ se ubicó en la posición de una de las cargas. Este desplazamiento del eje $\hat{z}$ no altera los resultado en una aproximación a primer orden.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}} + \mathbf{E}^{(2)}_{\mathrm{rad}} &= \frac{q\omega^2 a}{c^2 r}\left[\cos\theta\,\cos(\varphi-\omega t')\,\hat{\theta} - \,\mathrm{sen}\,(\varphi-\omega t')\,\hat{\varphi}\right]_{\mathbf{ret}} \\
&+ \frac{q\omega^2 a}{c^2 r}\left[\cos\theta\,\cos(\varphi-\omega t'+\alpha)\,\hat{\theta} - \,\mathrm{sen}\,(\varphi-\omega t'+\alpha)\,\hat{\varphi}\right]_{\mathbf{ret}} = \\
&= (1+\cos\alpha)\,\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}}(\varphi-\omega t') + \,\mathrm{sen}\,\alpha\,\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}}(\varphi-\omega t'+\pi/2)
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Observamos que si ambas cargas están en contrafase, entonces $\alpha = \pi$. Pero las dos cargas, además de estar en contrafase, están permanentemente separadas por una distancia $2a$. Eso provoca una diferencia de camino entre $\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}}$ y $\mathbf{E}^{(2)}_{\mathrm{rad}}$ de $2a\,\mathrm{sen}\,\theta$. Cuando ambas señales se sumen, lo harán con una diferencia de fase $\alpha = \pi - 2ka\,\mathrm{sen}\,\theta$. Más aún, como estamos suponiendo que $ka \ll 1$, entonces $\cos\alpha \simeq -1$ y $\mathrm{sen}\,\alpha = \mathrm{sen}\,(2ka\,\mathrm{sen}\,\theta) \simeq 2ka\,\mathrm{sen}\,\theta$. Por lo tanto,

$$
\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}} + \mathbf{E}^{(2)}_{\mathrm{rad}} \simeq 2ka\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{E}^{(1)}_{\mathrm{rad}}(\varphi-\omega t'+\pi/2) \tag{28}
$$

donde la fase $\pi/2$ no tiene importancia para el cálculo de la potencia irradiada. Finalmente se llega al resultado

$$
\langle\frac{dP}{d\Omega}\rangle = 4\,\frac{c}{4\pi}\left(\frac{q\omega^3 a^2}{c^3}\right)^2 \mathrm{sen}^2\theta\,\frac{1+\cos^2\theta}{2} \tag{29}
$$

La potencia irradiada es la suma de las potencias de cada partícula, tomando en cuenta la interferencia entre ambas. Observar que tomar en cuenta esta interferencia es equivalente a tomar en cuenta la distancia $2a$ entre las cargas. O sea, es equivalente a tomar en cuenta que las cargas no están en el origen, sino desplazadas entre sí. Esto altera el momento cuadrupolar, y por lo tanto, el hecho de considerar la interferencia corresponde a un nivel de aproximación cuadrupolar (ver la Tercera solución).

Tercera solución: por medio de un desarrollo multipolar

Vamos a hallar los campos de radiación de las dos partículas, suponiendo que el movimiento es *no* relativista, pero considerando ahora las contribuciones multipolares a la radiación. Un desarrollo multipolar a segundo orden es el siguiente

$$\mathbf{A} \simeq \frac{\dot{\mathbf{p}}}{cr} + \frac{\ddot{\mathbf{Q}}\,\hat{r}}{6c^2 r} + \frac{\dot{\mathbf{m}} \times \hat{r}}{cr}\bigg|_{\text{ret}} \tag{30}$$

donde $\mathbf{p} = \int \mathbf{r}\rho\, d^3r$, $Q_{ij} = \int (3r_i r_j - \delta_{ij})\,\rho\, d^3r$ y $\mathbf{m} = \dfrac{1}{2c}\int \mathbf{r} \times \mathbf{J}\, d^3r$.

No es necesario calcular el momento dioplar eléctrico $\mathbf{p}$ porque ya se mostró en la primera solución (ver más arriba) que es nulo. Igualmente, por simple inspección de la simetría en el movimiento de ambas partícular, se deduce que no hay momento dipolar eléctrico.

El momento dipolar magnético se calcula según la definición dada. Para cada partícula, $\mathbf{J} = q\omega a\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t)$ y $\mathbf{r}' = a\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t)$. Por lo tanto, es inmediato que

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}^{(1)} + \mathbf{m}^{(2)} = 2\,\frac{1}{2c}\left[a\,\hat{\boldsymbol{\rho}}'(\omega t) \times q\omega a\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}'(\omega t)\right] = \frac{q\omega\, a^2}{c}\,\hat{z} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\mathbf{m}} = 0 \tag{31}$$

Observamos que al no introducir deliberadamente (como en la solución anterior) la interferencia entre las emisiones de ambas cargas, el momento dipolar no registra una variación temporal. Simplemente, se presenta un momento dipolar magnético estático, y que por lo tanto, no contribuye a la radiación. Esto es una consecuencia de la aproximación *no* relativista, que no logra capturar las diferencias de fase (variables en el tiempo) entre ambas cargas.

Por la definición de los Q_{ij} es inmediato que $Q_{xz} = Q_{yz} = 0$ y $Q_{zz} = -Q_{xx} - Q_{yy}$. Además, $Q_{xx} = 2q[3a^2\,\cos^2(\omega t') - a^2]$, $Q_{yy} = 2q[3a^2\,\mathrm{sen}^2(\omega t') - a^2]$ y $Q_{xy} = 6\,qa^2\,\mathrm{sen}\,(\omega t')\,\cos(\omega t') = 3\,qa^2\,\mathrm{sen}\,(2\omega t')$. Las derivadas primera y segunda valen

$$\dot{\mathbf{Q}} = 6q\omega a^2 \begin{pmatrix} -\mathrm{sen}\,(2\omega t') & \cos(2\omega t') & 0 \\ \cos(2\omega t') & \mathrm{sen}\,(2\omega t') & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \ddot{\mathbf{Q}} = 12q\omega^2 a^2 \begin{pmatrix} -\cos(2\omega t') & -\mathrm{sen}\,(2\omega t') & 0 \\ -\mathrm{sen}\,(2\omega t') & \cos(2\omega t') & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

El producto $\ddot{\mathbf{Q}}$ con $\hat{r} = \mathrm{sen}\,\theta\,\cos\varphi\,\hat{x} + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\hat{y} + \cos\varphi$ resulta (para $t' = t - r/c$)

$$\ddot{\mathbf{Q}}\,\hat{r} = -12q\omega^2 a^2\,\mathrm{sen}\,\theta[\cos(2\omega t' - \varphi)\,\hat{x} + \,\mathrm{sen}\,(2\omega t' - \varphi)\,\hat{y}] = -12q\omega^2 a^2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\rho}}(2\omega t' - \varphi) \tag{33}$$

El campo de radiación vale

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = \frac{1}{c}(\dot{\mathbf{A}} \times \hat{r}) = -\frac{4q\omega^3 a^2}{c^3 r}\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}(2\omega t' - \varphi) \times \hat{r} \tag{34}$$

y podemos calcular el campo eléctrico inmediatamente (recordar que $\mathbf{B}_{\rm rad} = \hat{r} \times \mathbf{E}_{\rm rad}$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\rm rad} &= = -\frac{4q\omega^3 a^2}{c^3 r} \operatorname{sen}\theta \left[\operatorname{sen} 2(\omega t' - \varphi)\, \cos\theta\, \hat{\theta} - \cos 2(\omega t' - \varphi)\, \hat{\varphi}\right] && (35) \\
\langle |\mathbf{E}_{\rm rad}|^2 \rangle &= 16 \left(\frac{q\omega^3 a^2}{c^3 r}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \frac{1 + \cos^2\theta}{2} && (36) \\
\langle \frac{dP}{d\Omega} \rangle &= 16\, \frac{c}{4\pi} \left(\frac{q\omega^3 a^2}{c^3}\right)^2 \operatorname{sen}^2\theta\, \frac{1 + \cos^2\theta}{2} && (37)
\end{aligned}$$

La potencia irradiada, en este caso, se debe al momento cuadrupolar.