Problema resuelto por la identidad de Green

Problema

Una esfera conductora de radio a está conectada a potencial V y rodeada por una cáscara esférica de radio b cargada uniformemente con densidad σ. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio utilizando el método de la función de Green.

Solución

La función de Green en condición de Dirichlet nula para la esfera de radio a es la siguiente

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{|\mathbf{r} - r'\,\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{a}{r'}\,\frac{1}{|\mathbf{r} - (a^2/r')\,\hat{\mathbf{r}}'|} \tag{1}$$

y la identidad de Green (en condición de Dirichlet) asegura que

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' - \frac{1}{4\pi} \iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, d^2r' \tag{2}$$

donde $\mathcal{V}$ es el volumen de interés, es decir, toda la región $r \geq a$ en donde deseamos hallar $\phi(\mathbf{r})$. La superficie $S(\mathcal{V})$ es la que envuelve a *todo* ese volumen. En este caso, corresponde a la superficie $r = a$, más una superficie de radio $r \to \infty$.

La primera integral de la expresión (2) corresponde a la integral de Poisson de una densidad de carga superficial σ ubicada en $r' = b$, más una densidad imagen σ' ubicada en a^2/b. Como

$$\sigma\, G_D\, b^2 \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varphi' = \left[\frac{\sigma\, b^2}{|\mathbf{r} - b\,\hat{\mathbf{r}}'|} - \frac{b^3}{a^3}\,\sigma\,\frac{(a^2/b)^2}{|\mathbf{r} - (a^2/b)\,\hat{\mathbf{r}}'|}\right] \operatorname{sen}\theta'\, d\theta'\, d\varphi' \tag{3}$$

entonces la densidad de carga imagen debe valer $\sigma' = -\sigma\, b^3/a^3$. La solución de la integral de Poisson es la superposición de los potenciales debidos a ambas distribuciones.

Recordemos que, a partir de la ley de Gauss, el potencial de una distribución superficial constante σ es $4\pi r'\sigma$ si $r \leq r'$ y $4\pi r'^2\sigma/r$ si $r > r'$. Entonces, debe ser

$$\int_{\mathcal{V}} \rho\, G_D\, d^3r' = \begin{cases} 4\pi b\,\sigma - \dfrac{4\pi a^4\sigma'}{b^2 r} & \text{si} \quad a \leq r \leq b \\[2ex] \dfrac{4\pi b^2\sigma}{r} - \dfrac{4\pi a^4\sigma'}{b^2 r} & \text{si} \quad r > b \end{cases} \tag{4}$$

La segunda integral de la expresión (2) puede escribirse como

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, \frac{\partial G_D}{\partial n'}\, d^2r' = \iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, [\nabla G_D \cdot \hat{n}']\, d^2r' \tag{5}$$

El gradiente ∇G_D corresponde al campo eléctrico de la función de Green, dado que $\mathbf{E} = -\nabla G_D$, según la definición de potencial electrostático. Es decir, corresponde al campo eléctrico producido por una carga puntual de valor unitario, más su carga imagen. La carga de valor unitario se encuentra ubicada en cualquier punto exterior a la esfera de radio a. La carga imagen, en cambio, es interior a esta esfera. El campo eléctrico producido por ambas, está evaluado en la superficie $S(\mathcal{V})$.

Ahora podemos proceder de alguna de las siguientes maneras,

(i) La integral en (5) puede descomponerse en dos partes

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi\, [\nabla G_D \cdot \hat{n}']\, d^2r' = V \iint_{(r'=a)} (-\mathbf{E}) \cdot (-\hat{r}')\, d^2r' + \iint_{(r'=\infty)} \phi\, (-\mathbf{E} \cdot \hat{r}')\, d^2r' \tag{6}$$

Podemos interpretar la primera integral (del segundo miembro) como el flujo de campo eléctrico a través de $r' = a$. Pero según la ley de Gauss, ese flujo debe ser igual a la carga encerrada por la superficie $r' = a$ (y sólo por la superficie $r' = a$, ya que estamos condiderando a esta integral en forma aislada respecto del cálculo en la región de interés). La carga encerrada por $r' = a$ es la carga imagen $-a/r$. Aquí r es la posición de la carga unitaria, que es arbitraria siempre que sea exterior a la esfera de radio a.

Respecto de la última integral, debemos esperar que para superficies muy lejanas, el campo eléctrico decaiga como r'^{-2} y el potencial $\phi \sim r'^{-1}$. Por lo tanto, aunque la superficie de integración sea del orden de r'^2, la integral debe anularse cuando $r' \to \infty$.

El resultado final es que

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi \, \frac{\partial G_D}{\partial n'} \, d^2r' = -4\pi \frac{Va}{r} \tag{7}$$

(ii) Otra forma de proceder es considerar que ϕ es constante en cualquier superficie $S(\mathcal{V})$ de radio fijo r_0. Por lo tanto, la expresión (5) puede escribirse como

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi \, \frac{\partial G_D}{\partial n'} \, d^2r' = V \iint_{(r'=a)} (-\mathbf{E}) \cdot (-\hat{r}') \, d^2r' + \phi(r_0) \iint_{r'=r_0} (-\mathbf{E}) \cdot (+\hat{r}') \, d^2r' \tag{8}$$

donde $r_0 \to \infty$. La última integral (del segundo miembro) se puede resolver apelando nuevamente a la ley de Gauss. La superficie en $r' = r_0$ encierra toda la carga de Green, es decir, la carga de valor unitario, más su imagen de valor $-a/r$. En cambio, la integral evaluada en $r' = a$ sólo encierra la carga imagen. Entonces, sumando las contribuciones de ambas integrales se obtiene

$$\iint_{S(\mathcal{V})} \phi \, \frac{\partial G_D}{\partial n'} \, d^2r' = V \Big(-4\pi \frac{a}{r} \Big) - 4\pi \phi(r_0) \Big(1 - \frac{a}{r} \Big) \tag{9}$$

El útimo término en esta expresión se puede interpretar como la contribución del flujo neto a través de la superficie $r' = r_0$. Pero debemos considerar que $r_0 = \infty$, ya que la carga de prueba de Green puede ubicarse en cualquier punto $r > a$. En ese caso, debido a que $\phi(\infty) = 0$, obtenemos el mismo resultado que en (7).