Potencial del plano conductor

En la clase del miércoles resolvimos el problema de un plano conductor que está a potencial cero excepto en un disco de radio a que se encuentra a potencial V.

Usamos coordenadas cilíndricas, separando el espacio en dos regiones: por arriba y debajo del plano. Encontramos que la solución al potencial electrostático era:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk\, A(k)\, J_0(kr)\, e^{-k|z|} \tag{1}$$

$$A(k) = V \int_0^a dr\, kr\, J_0(kr) = V a\, J_1(ka) \tag{2}$$

donde las $J_n(x)$ son las funciones de Bessel de primera especie y orden n.

Lo que no hicimos fue ver cómo se recupera un resultado ya conocido por todos: el plano infinito. Para obtenerlo vamos a calcular el potencial sobre el eje y a una distancia mucho mas chica que el radio del disco, esto es, calculamos $\Phi(r = 0, z)$ para $z \ll a$.

Teniendo en cuenta que $J_0(0) = 1$ y que trabajampos en la región $z > 0$, el potencial sobre el eje nos queda

$$\Phi(z) = \int_0^\infty dk \left(V \int_0^a dr\, kr\, J_0(kr) \right) e^{-kz} \tag{3}$$

El factor entre paréntesis es el coeficiente $A(k)$, escrito en forma integral para posterior convenciencia. Este tipo de cosas, si no te las dicen, ni se te ocurre (al menos a mi no se me ocurrirían). Otra igualdad que tampoco hubiese pensado es la siguiente:

$$\left(V \int_0^a dr\, kr\, J_0(kr) \right) e^{-kz} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(V \int_0^a dr\, r\, J_0(kr) \right) e^{-kz} \tag{4}$$

El factor k que está dentro de la integral se puede pensar como la derivada de la exponencial en z. Reemplazando en el potencial tenemos

$$\Phi(z) = -V \int_0^\infty dk \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_0^a dr\, r\, J_0(kr) \right) e^{-kz} \tag{5}$$

$$\Phi(z) = -V \int_0^a dr\, r \frac{\partial}{\partial z} \int_0^\infty dk\, J_0(kr)\, e^{-kz} \tag{6}$$

$$\Phi(z) = -V \int_0^a dr\, r \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} = -V \int_0^a dr\, r \frac{z}{[z^2 + r^2]^{3/2}} \tag{7}$$

El final de la nota mostramos cómo se calcula la integral en dk. Es un resultado que se deduce desde la función de Green en coordenadas cilíndricas y que en el Jackson está como ejercicio.

Ya tenemos el potencial escrito de manera razonable. La integral que resta por hacer está en tablas, no presenta mayor dificultad. Y algo para remarcar: la variable r en la última expresión es una variable muda, no representa la coordenada radial del punto campo. Fue una variable que introducimos en (2) para escribir los coeficientes $A(k)$. De hecho, luego de integrar en dr, el potencial sólo depende de z, que es lo que esperamos.

Finalmente, el potencial resulta

$$\Phi(z) = V\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] = V\left[1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+a^2}}\right] \tag{8}$$

Si buscamos mostrar que esto recupera el resultado del plano infinito debemos hacer la aproximación $z \ll a$, esto significa que el borde del disco está suficientemente lejos como para verlo. Hacemos un desarrollo de Taylor en z/a ($\frac{\epsilon}{\sqrt{1+\epsilon^2}} \approx \epsilon - \frac{1}{2}\epsilon^2 + \cdots$):

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= V\left[1 - \frac{z}{a}\frac{1}{\sqrt{1+(z/a)^2}}\right] \\
\Phi(z) &\approx V\left[1 - \frac{z}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a}\right)^2 + \cdots\right] \\
\Phi(z) &\approx V\left[1 - \frac{z}{a}\right], \quad z > 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Si hubiésemos hecho lo mismo en la región inferior lo único que cambiaba es el signo delante del término con z. Por lo tanto, tenemos que

$$\Phi(z) \approx V - \frac{V}{a}|z| \tag{10}$$

Y este es el potencial que esperábamos, el de un disco infinito. Cuando se calcula $\mathbf{E} = -\nabla\Phi = V/a\hat{z}$, resulta que el campo eléctrico es constante y dirigido en la dirección normal al plano.

En el ejericio de la práctica, donde hay que calcular el potencial de un disco finito con densidad de carga σ, debería obtenerse una expresión similar a (1). Para calcular los límites de carga puntual y plano infinito, en este caso, se puede hacer lo siguiente:

♣ carga puntual: $a \to 0$, con $\sigma\,\pi a^2 \to q$ y $J_1(x) \approx \frac{1}{2}x + \cdots$;

♠ disco infinito: calcular el potencial sobre el eje para $z/a \ll 1$ y usar que $e^{-kz} \approx 1 - kz$.

Identidades a partir de la fucnión de Green en coordenadas cilíndricas.

Sabemos (o deberíamos saber) que

$$\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dk\, e^{\imath m(\varphi-\varphi')}\, J_m(kr)\, J_m(kr')\, e^{-k|z-z'|} \tag{11}$$

Sobre el eje z, tenemos que $\mathbf{r}' = 0$. Entonces

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dk\, e^{\imath m\varphi}\, J_m(kr)\, J_m(0)\, e^{-k|z|} \tag{12}$$

De las funciones de Bessel sabemos que $J_m(x) \propto (x)^m$ si $x \ll 1$, entonces $J_m(0) = \delta_{m0}$. Por lo tanto, la última igualdad se reduce a

$$\frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} = \int_0^\infty dk\, J_0(kr)\, e^{-k|z|} \tag{13}$$

Este resultado es el que usamos en (6) para calcular el potencial sobre el eje.