FÍSICA TEÓRICA 1 - 2do. Cuatrimestre 2015

Guía 1: Repaso de electrostática y magnetostática

1. **Cálculo vectorial básico**: i) Considere un sistema de referencia con origen en un punto O a partir del cual se construyen tres sistemas de coordenadas: cartesianas (x, y, z), esféricas (r, θ, ϕ) y cilíndricas (ρ, ϕ, z), con versores $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$ y $(\hat{\rho}, \hat{\phi}, \hat{z})$, respectivamente. Dado un vector posición $\mathbf{r}$:

   a. Desarrolle $\mathbf{r}$ según cada sistema de coordenadas; por ejemplo, en cartesianas $\mathbf{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y} + z\,\hat{z}$.
   b. Escriba los versores esféricos y cilíndricos asociados a $\mathbf{r}$ en términos de los versores cartesianos, y viceversa.
   c. Escriba las coordenadas cartesianas en términos de las esféricas y cilíndricas, y viceversa.

   ii) Demuestre las siguientes identidades:

   a) $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$, b) $\nabla \times \mathbf{r} = 0$, c) $\nabla r = \hat{r}$, d) $\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{r}}{r^2}$, e) $\nabla^2 \left(\frac{1}{r}\right) = 0$,

   f) $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3\hat{r}_i \hat{r}_j - \delta_{ij}}{r^3}$ (los índices i y j se refieren a las coordenadas cartesianas),

   g) $\nabla \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}}{r^3}\right) = \frac{\mathbf{a} - 3(\mathbf{a} \cdot \hat{r})\,\hat{r}}{r^3}$ ($\mathbf{a}$ es un vector constante).

   Notar que las tres primeras valen en todo el espacio. De las otras, por el momento, sólo puede decirse que valen para $r > 0$.

   Transformaciones de Simetría. Ley de Gauss. Ley de Ampere.

2. Para cada una de las siguientes distribuciones de carga: i) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes no necesariamente nulas del campo eléctrico. ii) Mediante la ley de Gauss, calcular el campo eléctrico; graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante. iii) Calcular el potencial escalar $\Phi(\mathbf{r})$; graficar cualitativamente.

   a. Una esfera cargada uniformemente en volumen.
   b. Una esfera cargada uniformemente en superficie.
   c. Una esfera cargada en volumen con una densidad de carga que depende sólo de r.
   d. Un plano infinito cargado uniformemente en superficie.
   e. Por superposición del anterior, dos planos paralelos infinitos, cargados uniformemente con densidades σ_1 y σ_2. Considerar los casos especiales $\sigma_1 = \sigma_2$ y $\sigma_1 = -\sigma_2$.
   f. Un hilo cargado con densidad uniforme.
   g. Un cilindro infinito cargado uniformemente en volumen.
   h. Un cilindro infinito cargado uniformemente en superficie.

3. Para cada una de las siguientes distribuciones de corriente: i) Utilizando transformaciones de simetría, determinar la dependencia funcional y las componentes no necesariamente nulas del campo magnético. ii) Mediante la ley de Ampere, calcular el campo magnético; graficar cualitativamente su módulo en función de una coordenada relevante. iii) Calcular el potencial vector $\mathbf{A}(\mathbf{r})$; graficar cualitativamente.

   a. Un hilo infinito por el que circula una corriente I.

b. Un plano infinito con densidad de corriente superficial uniforme.

c. Por superposición del anterior, dos planos paralelos infinitos, con corrientes superficiales uniformes de igual módulo y cuyas direcciones forman un ángulo α. Considerar los casos particulares $\alpha = 0$ y $\alpha = \pi$.

d. Una corriente uniforme radial que fluye entre dos esferas concéntricas de radios a y b. Interpretar el resultado.

e. Un cilindro infinito con corriente uniforme en su interior.

f. Un cilindro infinito, hueco, con densidad superficial de corriente uniforme paralela a su eje.

g. Un solenoide infinito con n vueltas por unidad de longitud, alimentado por una corriente I.

h. Un toro de sección circular con un total de N vueltas. ¿Qué ocurre si la sección del toro es arbitraria?

Integración directa: solución de Poisson.

4. Para las siguientes distribuciones de carga, calcular el potencial escalar electrostático mediante la integral de Poisson en las regiones que se detallan:

   a. Para puntos sobre el eje de un anillo de radio a uniformemente cargado, con carga total $Q = 2\pi a\,\lambda$. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy alejados al plano del anillo.

   b. Para puntos sobre el eje de un disco de radio a uniformemente cargado en superficie, con carga total $Q = \pi a^2\,\sigma$. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos y muy alejados al plano del disco.

   c. Sobre puntos del eje y sobre puntos de una bisectriz para un segmento de longitud L uniformemente cargado. Obtener expresiones límites para puntos muy cercanos al punto medio del segmento y para puntos muy alejados.

   Interpretar físicamente los resultados (sobre todo las expresiones límite), y graficar cualitativamente.

5. a. Calcular, usando la ley de Biot$-$Savart, el campo magnético sobre el eje de una espira circular de radio a por la que fluye una corriente I. Obtener la forma aproximada del campo para puntos sobre el eje muy alejados de la espira. Calcular el momento magnético y relacionar con la expresión del campo obtenida para puntos lejanos.

   b. Un disco de radio a, cargado con densidad superficial uniforme σ, rota con velocidad angular constante ω alrededor de su eje. Calcular, usando la ley de Biot$-$Savart, el campo magnético sobre el eje y obtener su comportamiento para puntos lejanos. Por otro lado, calcular el momento magnético del disco y relacionarlo con la expresión obtenida antes del campo en puntos lejanos.

6. En el estado fundamental del átomo de hidrógeno, el potencial generado por el núcleo puntual y la nube electrónica es

$$\Phi(r) = \frac{q}{r}(1 + r/a)\exp(-2r/a),$$

   donde a es el radio de Bohr y q es la carga del protón.

   a. Encontrar la densidad de carga para todo r.

   b. Interpretar el resultado en términos de las contribuciones del núcleo y de la nube electrónica.

c. Verificar que esa distribución corresponde a un átomo neutro.

d. Sabemos que la distribución de carga encontrada está asociada a átomos estables. ¿Contradice, entonces, esta distribución el teorema de Earnshaw?

7. Un solenoide de sección circular tiene largo L, radio a, n vueltas por unidad de longitud y corriente I.

   a. Demostrar que el campo magnético a lo largo del eje es:

$$\mathbf{B} = \frac{2\pi n I}{c}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\,\hat{z},$$

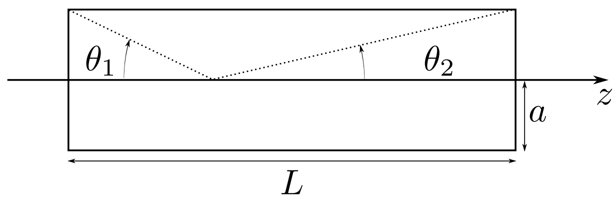
   donde θ_1 y θ_2 se muestran en la figura y el eje z coincide con el eje del solenoide.

   b. Si el solenoide es largo ($a \ll L$), demostrar que la componente radial del campo magnético es

$$B_\rho \approx \frac{96\pi n I}{c}\left(\frac{a^2 z\rho}{L^4}\right),$$

   válida hasta segundo orden en a/L para puntos cercanos al centro del solenoide ($z \ll L, \rho \ll a$). En esta expresión el origen de coordenadas coincide con el centro geométrico del solenoide.

   c. Como caso límite hallar el campo magnético producido por un solenoide infinito. Verificar el resultado comparándolo con el del problema 3g).



Fuerzas y Cuplas

8. a. Calcular la fuerza y la cupla por unidad de área que ejerce un plano sobre el otro en los casos descriptos en los problemas 2e y 3c.

   b. Se tienen dos hilos infinitos paralelos. Calcular la fuerza y la cupla que ejerce uno sobre el otro por unidad de longitud en los casos:

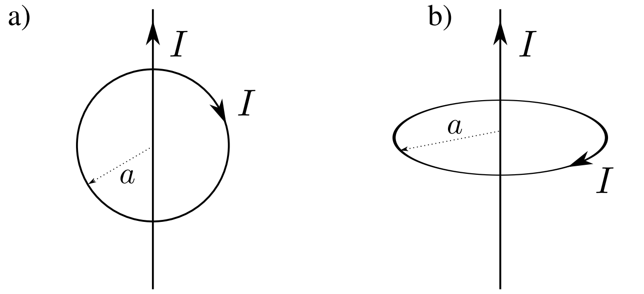
      i. Los hilos están cargados con densidades lineales $\lambda_1 = \pm\lambda_2$.

      ii. Por los hilos circulan corrientes $I_1 = \pm I_2$.

9. Hallar la fuerza y la cupla ejercidos sobre la espira de la figura en las dos situaciones indicadas.

   a. El hilo está en el plano de la espira y pasa por su centro.

   b. El hilo es perpendicular al plano de la espira y pasa por su centro.



Principio de Superposición

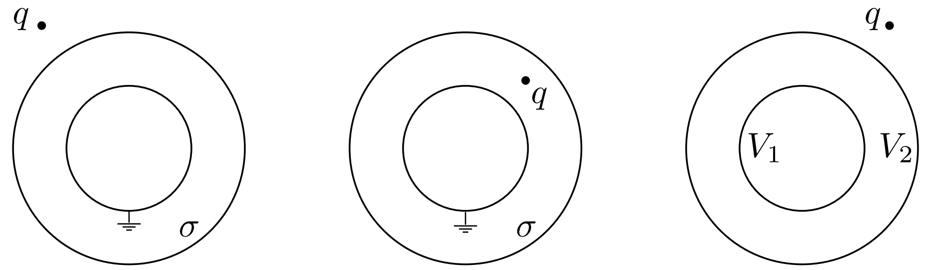
10. a. Usando superposición, encontrar el campo y el potencial electrostático producido por dos hilos paralelos infinitos, uniformemente cargados con $\lambda_1 = -\lambda_2$ y separados una distancia $2a$.
    b. Encontrar y dibujar cualitativamente las equipotenciales. ¿Qué aspecto tiene el campo en el plano equidistante entre los dos hilos?
    c. ¿Cómo puede usarse el resultado anterior para resolver el problema de dos cilindros del mismo radio, a potenciales opuestos, separados por una distancia mayor que la suma de sus radios? ¿Es siempre posible reducir el problema de dos cilindros a potenciales fijos a un problema equivalente de dos cables con densidades de carga opuestas?

11. Un cilindro infinito de radio a tiene una densidad uniforme de carga, salvo a lo largo de una cavidad cilíndrica de radio b, que corre paralela al eje del cilindro. El eje de la cavidad está a una distancia d del eje del cilindro principal, tal que $d + b < a$.
    a. Calcular el campo eléctrico dentro de la cavidad.
    b. Si en lugar de tener una densidad de carga uniforme, el cilindro transportase una corriente uniforme paralela a su eje, calcular el campo magnético dentro de la cavidad.

    Notar que la cavidad "congela" los campos en los valores que tendrían en el centro de la cavidad de no haber estado ésta presente, y que los campos eléctrico y magnético son perpendiculares entre sí.

12. Se tienen tres cáscaras cilíndricas concéntricas de radios $a < b < c$. La cáscara de radio c está siempre a potencial cero. Calcular el potencial electrostático en la región $\rho \leq c$ en los siguientes casos:
    a. Los cilindros de radios a y b son conductores y están conectados a potenciales V_1 y V_2.
    b. Los cilindros de radios a y b están cargados uniformemente con cargas Q_1 y Q_2 por unidad de longitud. ¿Qué sucedería si los cilindros fueran conductores?
    c. El cilindro de radio a está conectado a potencial V y el de radio b está cargado con carga Q por unidad de longitud. Interpretar cada una de las contribuciones al potencial.

13. a. Calcular el potencial electrostático para todo punto del espacio producido por una esfera metálica a tierra rodeada por una cáscara esférica con una densidad de carga uniforme σ.
    b. Suponiendo conocido el potencial producido por una carga frente a una esfera a tierra, y el resultado del punto a), indicar cómo utilizar el principio de superposición en los siguientes casos:



Preguntas molestas

1. ¿Qué es una transformación de simetría?
2. ¿Qué característica fundamental suele distinguir las transformaciones de simetría que se usan para determinar dependencias funcionales de aquellas usadas para anular componentes de los campos?