Física Teórica 1 - 1$^{\text{er}}$ cuatrimestre de 2009
1$^{\text{er}}$ parcial (13/5/2009)

1. Un cilindro circular de radio a y longitud infinita tiene una densidad de magnetización permanente dada por

$$\mathbf{M}(\rho,\phi,z) = \frac{aM_0}{\rho}\Big([1-\cos(\alpha\rho)]\,\sin(\alpha z)\,\hat{\rho} + \sin(\alpha\rho)\,\cos(\alpha z)\,\hat{z}\Big),$$

donde α y M_0 son constantes dadas, y (ρ, ϕ, z) son las coordenadas cilíndricas, tomando el eje z según el eje del cilindro.

(a) Escriba todas las fuentes de $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ asociadas al cilindro magnético.

(b) Halle los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio suponiendo que el cilindro está inmerso en un medio de permeabilidad μ.

(c) ¿Para qué valores de α es cero el campo $\mathbf{B}$ fuera del cilindro? ¿Cuánto valen en ese caso $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio?

Ayudas: En coordenadas cilíndricas: $\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z$,

$$(\nabla\times\mathbf{A})_\rho = \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi, \qquad (\nabla\times\mathbf{A})_\phi = \partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z, \qquad (\nabla\times\mathbf{A})_z = \frac{1}{\rho}\partial_\rho(\rho A_\phi) - \frac{1}{\rho}\partial_\phi A_\rho.$$

Para ν entero, las funciones $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $I_\nu(x)$ y $K_\nu(x)$ cumplen $J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$, $N_\nu(-x) = (-1)^\nu N_\nu(x)$, etc.

2. Una esfera dieléctrica de constante ϵ y radio a está centrada en el origen y permanece en reposo. Sobre la esfera hay aplicado un campo eléctrico externo que al infinito toma el valor constante $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{x}$.

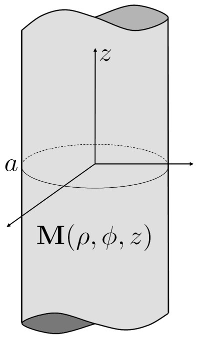
(a) Encuentre el potencial electrostático Φ, el campo eléctrico $\mathbf{E}$, el campo $\mathbf{D}$ y la densidad de polarización $\mathbf{P}$ dentro y fuera de la esfera.

(b) Teniendo en cuenta el resultado del ítem anterior, suponga ahora que la esfera rota con velocidad angular ω alrededor del eje z (ver figura). Calcule $\mathbf{H}$ en todo punto del espacio y diga cuáles son sus fuentes. Tenga en cuenta que para un medio polarizado en movimiento, la ecuación del rotor de $\mathbf{B}$ en situaciones estacionarias pasa a ser

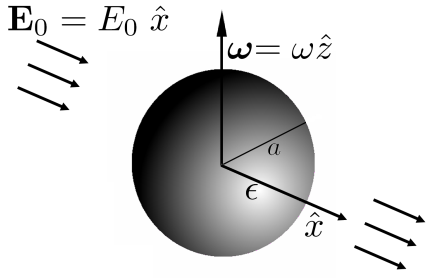
$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j_L} + \frac{4\pi}{c}\nabla\times(\mathbf{P}\times\mathbf{v}).$$

[Nota: para un medio en movimiento, la relación $4\pi\mathbf{P} = (\epsilon-1)\mathbf{E}$ es válida sólo a orden cero en la velocidad. En este problema no se pide ir más lejos que eso.]

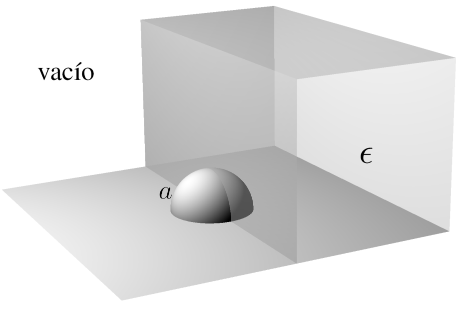
3. La base de una semiesfera conductora de radio a está apoyada en el plano xy y su centro coincide con el origen de coordenadas. El plano xy está ocupado por un conductor infinito. El plano vertical xz divide esta región en otras dos regiones: la región con $y \geq 0$ está ocupada por un medio dieléctrico de permitividad ϵ, mientras que en $y < 0$ hay vacío. La región de interés de este problema es la definida por las condiciones $r \geq a$ y $z \geq 0$, es decir, por encima del plano xy y en el exterior de la semiesfera. Encontrar la función de Green para el problema de Dirichlet en esta región.



Problema 1



Problema 2



Problema 3