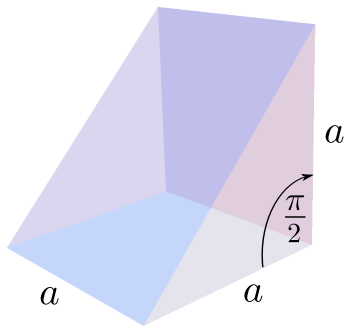
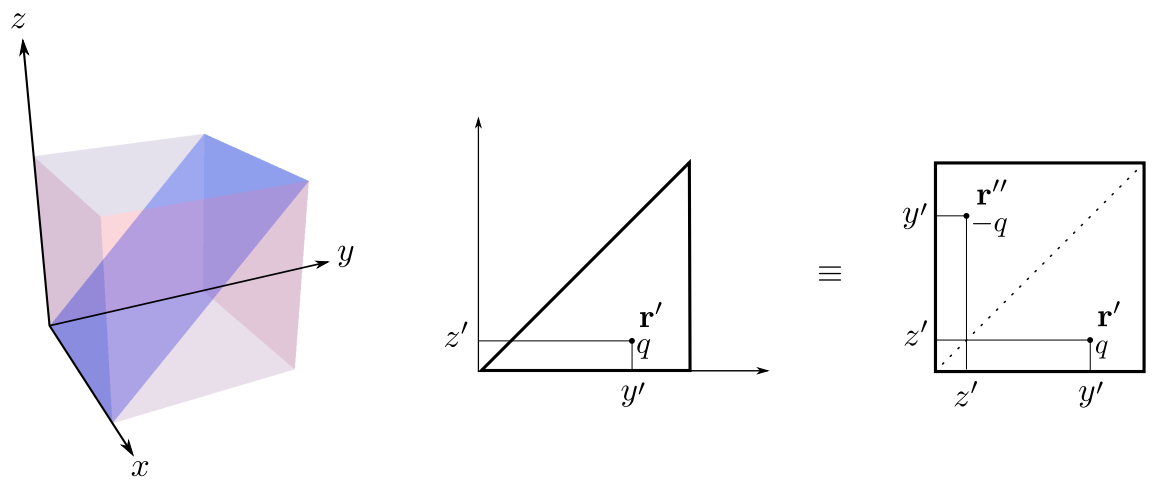
Física Teórica 1 - 2do cuatrimestre de 2010 - 1er parcial (6/10)

Problema 1. Calcule la función de Green de Dirichlet para el interior de la región en forma de cuña de la figura.



Solución. El recinto puede pensarse como si fuera la mitad de un cubo de lado a. El corte es a través de un plano que une dos aristas opuestas. Como es un plano de simetría del cubo, el problema puede resolverse por imágenes. Basta una sola carga imagen puesta en la posición que es simétrica de la posición de la carga de prueba respecto del plano que divide al cubo en dos. Con los ejes como en la figura, si la carga de prueba está en $\mathbf{r}' = (x', y', z')$, la carga imagen estará en $\mathbf{r}'' = (x', z', y')$.



Si G_{c} es la función de Green del cubo, la función de Green buscada será

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_{\text{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - G_{\text{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}''). \tag{1}$$

Como y y z aquí tienen roles equivalentes, será práctica una forma de G_{c} en donde estas variables sean tratadas de igual modo,

$$G_{\text{c}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{16}{a} \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y'}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi z'}{a}\right) \; F_{nm}(x, x'),$$

donde

$$F_{nm}(x, x') = \frac{\sinh[k_{nm} x_<] \sinh[k_{nm}(a - x_>)]}{\sqrt{n^2 + m^2} \sinh[k_{nm} a]}, \qquad k_{nm} = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2}.$$

A esta forma de la función de Green para el cubo se llega si se separa en zonas con un plano por $x = x'$. Haciendo la superposición (1) se obtiene

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{16}{a}\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{a}\right)\; F_{nm}(x,x') \\ \times\left[\sin\left(\frac{n\pi y'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z'}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right].$$

Para ver que se cumple la condición $G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\big|_{y=z} = 0$, hay que notar que en la expresión

$$G(\mathbf{r},\mathbf{r}')\big|_{y=z} = \frac{16}{a}\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{a}\right)\; F_{nm}(x,x') \\ \times\left[\sin\left(\frac{n\pi y'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi z'}{a}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z'}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y'}{a}\right)\right],$$

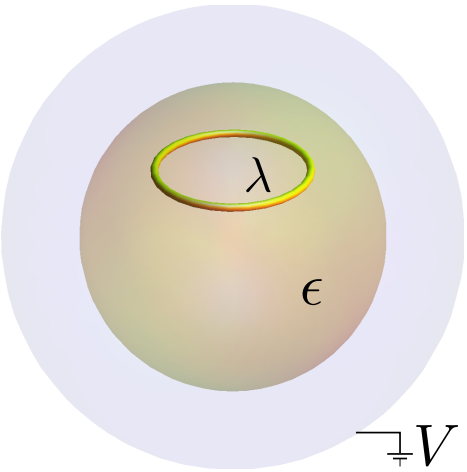
todo lo que está en la primera línea es simétrico respecto al intercambio de n por m, y que lo que está en la segunda es antisimétrico, por lo tanto la suma se anula.

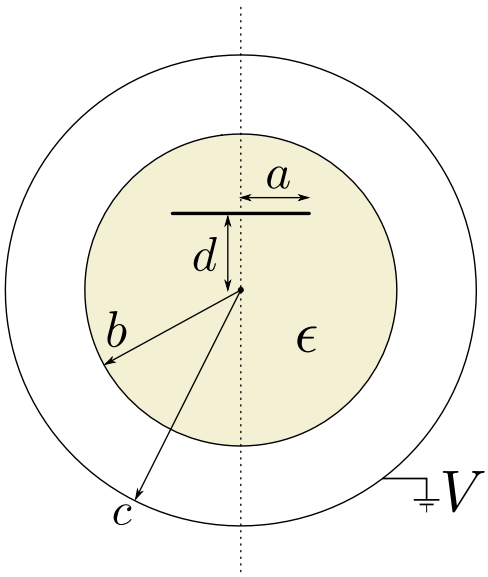
Problema 2.

(a) Calcule el potencial en todo el espacio para la configuración mostrada en la figura. Se trata de una esfera conductora a potencial V. Dentro de ella, hay una esfera dieléctrica, y, dentro de la esfera dieléctrica, un anillo con densidad lineal λ.

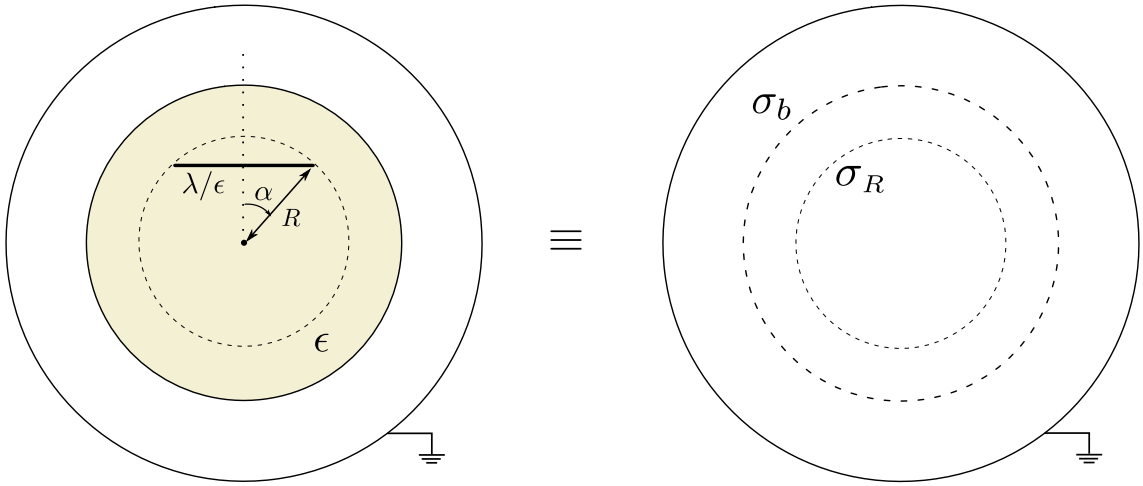
(b) A partir del resultado anterior, dando valores adecuados a los parámetros del problema, escriba el potencial para el caso en que la esfera conductora no esté presente.

(c) En el caso en que la esfera conductora no está presente, calcule el momento dipolar total del sistema del anillo y la esfera dieléctrica.





Solución. (a) Si elegimos el eje z en la dirección del eje del anillo, el problema tendrá simetría azimutal. Lo ideal sería no tener que dividir en tres regiones. Supongamos primero que la esfera conductora está a $V = 0$. Nos concentraremos en el problema de encontrar el potencial en la región interior a la esfera conductora, ya que afuera el potencial debe ser cero. Al estar inmerso en el dieléctrico, el anillo tiene efectivamente una densidad de carga λ/ϵ. Esas son todas las cargas dentro del dieléctrico. En la superficie del dieléctrico se inducirá una densidad σ_b, en principio desconocida. Como el anillo puede inscribirse en la superficie de una esfera de radio $R = \sqrt{a^2 + d^2}$,



el potencial total dentro de la esfera conductora podrá expresarse como la suma de los potenciales de dos distribuciones superficiales, una sobre la esfera de radio b y otra sobre la esfera de radio R,

$$\Phi = \Phi_R + \Phi_b.$$

Al decir esto, implícitamente estamos considerando que estos potenciales satisfacen ambos la condición de contorno $\Phi = 0$ en la superficie de la esfera de radio c, pues, si no, deberíamos incluir también un tercer potencial que sea el resultado de las cargas inducidas en esa esfera. Veamos primero cuál es la forma general de estos potenciales. Tomemos el caso de una distribución que está sobre una esfera de radio R. Habrá que dividir en dos zonas, una entre 0 y R y la otra entre R y c. En la zona interior, el potencial sólo puede tener potencias positivas de r. En la zona exterior, están permitidas tanto las potencias positivas como negativas y además el potencial debe anularse en $r = c$. Agregando a esto continuidad a través de la superficie de radio R, debe ser

$$\Phi_R(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left[\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} - \frac{(rR)^l}{c^{2l+1}} \right] P_l(\cos\theta). \tag{2}$$

La comparación que define $r_>$ y $r_<$ es entre r y R. Análogamente, el potencial asociado a la distribución inducida sobre la superficie del dieléctrico se escribirá como

$$\Phi_b(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} B_l \left[\frac{\tilde{r}_<^l}{\tilde{r}_>^{l+1}} - \frac{(rb)^l}{c^{2l+1}} \right] P_l(\cos\theta), \tag{3}$$

donde ahora $\tilde{r}_>$ y $\tilde{r}_<$ surgen de la comparación entre r y b. Para el anillo conocemos la distribución superficial,

$$\sigma_R(\theta) = \frac{a\lambda}{R^2\epsilon}\,\delta(\cos\theta - \cos\alpha),$$

donde $\cos\alpha = d/R$. Esta distribución puede desarrollarse en polinomios de Legendre,

$$\sigma_R(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_R^{(l)}\, P_l(\cos\theta),$$
$$\sigma_R^{(l)} = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\; P_l(\cos\theta)\sigma_R(\theta) = \frac{\lambda}{R\epsilon}\,\frac{2l+1}{2}\,P_l(\cos\alpha).$$

El salto de la derivada radial de Φ_R da la ecuación necesaria para encontrar los A_l. El término $l-$ésimo de esta ecuación es

$$\frac{(2l+1)A_l}{R^2} = \frac{4\pi a\lambda}{R^2\epsilon}\,\frac{2l+1}{2}\,P_l(\cos\alpha),$$

luego

$$A_l = Q_\epsilon\, P_l(\cos\alpha),$$

donde $Q_\epsilon = 2\pi a\lambda/\epsilon$ es la carga efectiva del anillo.

No conocemos la densidad σ_b inducida sobre la superficie del dieléctrico, pero ahí tenemos la condición de continuidad de $\mathbf{D}$ normal. Dentro del dieléctrico, $\mathbf{D} = -\epsilon\nabla\Phi$, y afuera es $\mathbf{D} = -\nabla\Phi$. Aquí Φ es el potencial completo, $\Phi_R + \Phi_b$. La continuidad de $\mathbf{D}$ normal se expresa como

$$\epsilon\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=b^-} = \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=b^+}.$$

El término $l-$ésimo de esta ecuación puede escribirse como sigue

$$(\epsilon-1)\left(\frac{R}{b}\right)^l\left[1+l+l\left(\frac{b}{c}\right)^{2l+1}\right]A_l = \left[(1+\epsilon)l+1-l\left(\frac{b}{c}\right)^{2l+1}(\epsilon-1)\right]B_l.$$

De aquí se despeja B_l.

En lo anterior asumimos que la esfera exterior estaba a tierra. Si está a un potencial V, todo lo que habrá que hacer es sumar V a lo que ya calculamos,

$$\Phi = \Phi_R + \Phi_b + V,$$

válido en la región interior a la esfera conductora. Como el término que estamos sumando es constante, su inclusión no podría modificar ninguno de los cálculos que hicimos antes, donde sólo intervinieron las derivadas del potencial. Por otro lado, en el exterior de la esfera conductora debe ser $\Phi(\mathbf{r}) = Vc/r$.

(b) Fijar $V = 0$ y hacer c tender a infinito elimina del problema la superficie conductora externa. Al tomar $c \longrightarrow \infty$ los B_l son

$$\lim_{c\to\infty} B_l = (\epsilon - 1)\left(\frac{R}{b}\right)^l \frac{l+1}{(1+\epsilon)l+1} A_l. \tag{4}$$

En las expresiones de los potenciales (2) y (3) hay que descartar también los términos con potencias negativas de c,

$$\Phi_R(\mathbf{r}) \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} A_l \frac{r_<^l}{r_>^{l+1}} P_l(\cos\theta)$$

$$\Phi_b(\mathbf{r}) \longrightarrow \sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{\tilde{r}_<^l}{\tilde{r}_>^{l+1}} P_l(\cos\theta).$$

Aquí se entiende que los B_l están dados por (4).

(c) Para calcular el momento dipolar, es suficiente escribir el término del potencial con $l = 1$ en la región exterior al dieléctrico. Usando los resultados anteriores, ese término es

$$\Phi_1(\mathbf{r}) \equiv \frac{R}{r^2} A_1 \cos\theta + (\epsilon - 1)\left(\frac{R}{b}\right) \frac{2}{2+\epsilon} \frac{b}{r^2} A_1 \cos\theta$$

$$= \frac{R}{r^2} \frac{3\epsilon}{2+\epsilon} A_1 \cos\theta.$$

De aquí se lee el momento dipolar, pues sabemos que el potencial de un dipolo en la dirección z es

$$\Phi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{p\cos\theta}{r^2}.$$

Luego,

$$p = \frac{3\epsilon}{2+\epsilon} R A_1 = \frac{3}{2+\epsilon} QR\cos\alpha = \frac{3}{2+\epsilon} Qd.$$

Este resultado tiene sentido, porque en el caso en que ϵ es igual a 1 resulta $p = Qd$, lo que evidentemente es correcto.

Problema 3. Un cilindro circular infinito de radio a tiene una corriente superficial

$$\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = \kappa_0 \sin\varphi \cos\lambda z \, \hat{z}, \tag{5}$$

donde κ_0 y λ son constantes.

(a) Si la corriente superficial está asociada a una densidad de magnetización permanente $\mathbf{M}$, tal que $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$ dentro del cilindro, encuentre un $\mathbf{M}$ posible.

(b) Para el $\mathbf{M}$ del punto anterior, encuentre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio. La solución puede quedar expresada en términos del gradiente de un campo escalar; no es necesario calcular este gradiente.

(c) Por qué sistema de corrientes libres podría reemplazarse la magnetización $\mathbf{M}$ para tener el mismo campo $\mathbf{B}$ en todo el espacio.

(d) Punto extra: escriba los campos y las corrientes de magnetización en el caso $\lambda = 0$.

Solución. (a) Podemos aplicar la fórmula general para la corriente superficial de magnetización,

$$\boldsymbol{\kappa} = c(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \times \mathbf{n}.$$

Para el cilindro, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}$, $\mathbf{M}_2 = 0$ y $\mathbf{n} = \hat{\rho}$. Así,

$$\boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = c\mathbf{M} \times \hat{\rho} = \kappa_0 \, \sin\varphi \, \cos\lambda z \, \hat{z}. \tag{6}$$

Supongamos que en la superficie del cilindro la magnetización sea

$$\mathbf{M}_{\mathrm{c}} = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z},$$

entonces, usando $\hat{\rho} = \cos\varphi \, \hat{x} + \sin\varphi \, \hat{y}$, sería

$$\frac{1}{c} \boldsymbol{\kappa}(\varphi, z) = -M_z \sin\varphi \, \hat{x} + M_z \cos\varphi \, \hat{y} + (M_x \sin\varphi - M_y \cos\varphi) \, \hat{z}.$$

Aquí vemos que M_z en la superficie del cilindro tiene que ser 0. La forma más sencilla de satisfacer (6) es elegir $M_y = 0$ y tomar

$$M_x = \frac{1}{c} \kappa_0 \, \cos\lambda z.$$

De manera que en la superficie del cilindro tenemos

$$\mathbf{M}_{\mathrm{c}}(z) = \frac{1}{c} \kappa_0 \cos\lambda z \, \hat{x}.$$

Ahora bien, si dijéramos que dentro del cilindro $\mathbf{M}$ sigue estando dada por esta misma expresión, conseguimos también tener $\nabla \cdot \mathbf{M} = 0$, puesto que la divergencia de un campo que depende de z pero que está en la dirección x es cero. Este $\mathbf{M}$ que encontramos es uno posible, pero, acaso, no el único.

(b) Como la divergencia de $\mathbf{M}$ es cero en el volumen y no hay corrientes libres, podemos escribir $\mathbf{H} = -\nabla\Phi$, donde Φ satisface la ecuación de Laplace dentro y fuera del cilindro. En la superficie habrá una densidad superficial

$$\sigma(\varphi, z) = \mathbf{M}(z) \cdot \hat{\rho} = \frac{1}{c} \kappa_0 \cos\lambda z \, \cos\varphi.$$

Esta distribución es par respecto de φ y respecto de z. Podríamos proponer para Φ la siguiente forma

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \cos\nu\varphi \int_0^{\infty} dk \, \cos kz \, A_\nu(k) I_\nu(k\rho_<) K_\nu(k\rho_>).$$

Debe cumplirse la condición de salto,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \nu\varphi \int_0^{\infty} dk \ \cos kz \ \frac{A_\nu(k)}{a} = \frac{4\pi}{c} \kappa_0 \cos \lambda z \ \cos \varphi.$$

No hay que tomarse el trabajo de desarrollar σ en la misma forma que Φ, puesto que el miembro de la derecha ya está desarrollado como Φ. La identificación es directa,

$$A_\nu(k) = \frac{4\pi a}{c} \kappa_0 \, \delta_{\nu,1} \delta(k - \lambda).$$

El potencial es entonces

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{4\pi a}{c} \kappa_0 \cos \lambda z \ \cos \varphi \ I_1(\lambda \rho_<) K_1(\lambda \rho_>). \tag{7}$$

Dentro del cilindro es

$$\mathbf{B} = -\nabla \Phi + 4\pi \mathbf{M}$$

y fuera, directamente $\mathbf{B} = \mathbf{H}$.

(c) Además de las corrientes superficiales, $\mathbf{M}$ puede tener asociadas corrientes en volumen,

$$\mathbf{j} = c \nabla \times \mathbf{M}.$$

Para el $\mathbf{M}$ que hemos elegido

$$c \nabla \times \mathbf{M}(\mathbf{r}) = c \, \frac{\partial M_x(z)}{\partial z} \, \hat{y} = -\lambda \kappa_0 \sin \lambda z \, \hat{y}. \tag{8}$$

Si se reemplazara la magnetización por un sistema de corrientes libres, en volumen tendría que haber una corriente dada por la fórmula anterior, y en superficie, una densidad de corriente (5).

(d) Cuando $\lambda = 0$, las corrientes de magnetización dentro del cilindro, dadas por (8), son cero. En la superficie del cilindro

$$\boldsymbol{\kappa}(\varphi) = \kappa_0 \ \sin \varphi \ \hat{z}.$$

En la expresión (7) para el potencial, podemos usar el límite

$$\lim_{\lambda \to 0} I_1(\lambda \rho_<) K_1(\lambda \rho_>) = \frac{\rho_<}{2\rho_>}.$$

Luego,

$$\Phi_{\lambda=0}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi a \, \kappa_0}{c} \, \frac{\rho_<}{\rho_>} \ \cos \varphi.$$

Dentro del cilindro,

$$\Phi_{\lambda=0}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi \, \kappa_0}{c} \, \rho \ \cos \varphi = \frac{2\pi \, \kappa_0}{c} \, x, \qquad \rho < a.$$

Esto da campos $\mathbf{H}$ y $\mathbf{B}$ constantes dentro del cilindro

$$\mathbf{H} = -\frac{2\pi\,\kappa_0}{c}\,\hat{x}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M} = \frac{2\pi\,\kappa_0}{c}\,\hat{x}.$$

Fuera del cilindro,

$$\Phi_{\lambda=0}(\mathbf{r}) = \frac{2\pi a^2\,\kappa_0}{c\rho}\,\cos\varphi = \frac{2\pi a^2\,\kappa_0}{c}\,\frac{x}{\rho^2}, \qquad \rho > a.$$

Fuera del cilindro, $\mathbf{B} = \mathbf{H}$, con

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\frac{2\pi a^2\,\kappa_0}{c}\,\nabla\left(\frac{x}{\rho^2}\right) = \frac{2\pi a^2\,\kappa_0}{c}\,\frac{2(\hat{x}\cdot\hat{\rho})\hat{\rho} - \hat{x}}{\rho^2}.$$

Este es el campo de un dipolo $\mathbf{m}$ en dos dimensiones, con $\mathbf{m} = \dfrac{2\pi a^2\,\kappa_0}{c}\,\hat{x}$.