# Física Teórica 1 - $1^{er}$ cuatrimestre de 2010

**Resolución del problema 1 del $1^{er}$ parcial**

**a)** Queremos hallar la función de Green $G_\alpha(\vec{r}, \vec{r'})$ para el problema de Dirichlet entre dos semiplanos que se intersectan a lo largo del eje $z$ formando un ángulo $\alpha$. Para ello buscamos el potencial electrostático $\phi$ de una carga puntual situada en $\vec{r'}$ con $q = 1$, y los dos semiplanos a tierra. Se pide un desarrollo en funciones de Bessel $J_\nu$, las cuales surgen naturalmente de la separación de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas ($\rho$, $\varphi$, $z$). Por lo tanto buscamos separar la región de interés por una superficie que respete la dicha simetría y que contenga a la carga puntual, de manera que en las dos regiones se cumpla $\nabla^2\phi = 0$.

Hay dos posibles bases de soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas:

$$\left\{e^{\pm i\nu\varphi}\right\} \quad ; \quad \{J_\nu(k\rho), N_\nu(k\rho)\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{e^{\pm kz}\right\} \quad \text{(no es base)}$$

$$\left\{e^{\pm i\nu\varphi}\right\} \quad ; \quad \left\{e^{\pm ikz}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \{I_\nu(k\rho), K_\nu(k\rho)\} \quad \text{(no son base)}$$

Si separamos con una superficie a $\varphi$ o $\rho$ constantes, las regiones resultantes se extienden infinitamente en $z$ ($-\infty < z < \infty$). En ese caso necesitaríamos utilizar la base en la dirección $z$, $\left\{e^{\pm ikz}\right\}$, dado que no habría restricciones en dicha dirección. Sin embargo eso no permitiría desarrollar en funciones $J_\nu(k\rho)$ la parte radial, y por lo tanto no nos sirve.

Separamos en dos regiones delimitadas por un plano perpendicular a $z$, situado en la posición de la carga $z'$. La región I para $z < z'$ y la región II para $z > z'$. La solución más general de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas utilizando el primer conjunto de bases es

$$\phi_{I,II}(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\nu \; J_\nu(k\rho)\left[A^{I,II}(k,\nu)e^{i\nu\varphi} + B^{I,II}(k,\nu)e^{-i\nu\varphi}\right]\left[C^{I,II}(k,\nu)e^{kz} + D^{I,II}(k,\nu)e^{-kz}\right]$$

donde ya descartamos las funciones $N_\nu(k\rho)$ porque son divergentes cuando $\rho \to 0$.

Aplicamos las condiciones de contorno en los semiplanos a tierra, o sea $\phi(\varphi = 0) = \phi(\varphi = \alpha) = 0$. En $\varphi = 0$ obtenemos el requerimiento $A^{I,II}(k,\nu) + B^{I,II}(k,\nu) = 0$, por lo que la parte angular de la solución se comporta como $\sin(\nu\varphi)$. Entonces

$$\phi_{I,II}(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \int_0^\infty d\nu \; J_\nu(k\rho)\sin(\nu\varphi)\left[\tilde{C}^{I,II}(k,\nu)e^{kz} + \tilde{D}^{I,II}(k,\nu)e^{-kz}\right]$$

donde absorbimos varios factores en la redefinición de los coeficientes $\tilde{C}(k,\nu)$ y $\tilde{D}(k,\nu)$. La condición sobre el otro semiplano en $\varphi = \alpha$ se satisface si $\sin(\nu\alpha) = 0$, lo que impone que

$$\nu\alpha = n\pi \Longrightarrow \boxed{\nu_n = \frac{n\pi}{\alpha}}$$

Esta discretización sobre los valores posibles de $\nu$, implica pasar de tener una integral $\int_0^\infty d\nu$ a tener una suma $\sum_{n=1}^\infty$. Nos queda entonces

$$\phi_{I,II}(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty J_{\nu_n}(k\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)\left[\tilde{C}_n^{I,II}(k)e^{kz} + \tilde{D}_n^{I,II}(k)e^{-kz}\right]$$

Luego pidiendo que en los límites $z \to \pm\infty$ el integrando no diverja, sale que $\tilde{D}_n^I(k) = 0$ y $\tilde{C}_n^{II}(k) = 0$, tenemos para $\phi_I$ y $\phi_{II}$

$$\phi_I(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty J_{\nu_n}(k\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)\tilde{C}_n^I(k)e^{kz}$$

$$\phi_{II}(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty J_{\nu_n}(k\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)\tilde{D}_n^{II}(k)e^{-kz}$$

Ahora exigimos la continuidad del potencial en $z = z'$, $\phi_I(z = z') = \phi_{II}(z = z')$, lo cual implica que $\tilde{C}^I(k,\nu)e^{kz'} = \tilde{D}^{II}(k,\nu)e^{-kz'}$. Entonces podemos definir un coeficiente $\tilde{A}_n(k) = \tilde{C}_n^I(k)e^{kz'}$, y reescribir $\phi_I$ y $\phi_{II}$ en una sola expresión

$$\phi(\rho,\varphi,z) = \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty \tilde{A}_n(k)J_{\nu_n}(k\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)e^{-k|z-z'|}$$

Por último falta determinar los coeficientes $\tilde{A}_n(k)$ imponiendo la condición sobre el salto del campo en el plano $z = z'$, cuya normal es $\hat{n} = \hat{z}$

$$\left(\vec{E}_{II} - \vec{E}_I\right)\cdot\hat{n} = \left(\frac{\partial\phi_I}{\partial z} - \frac{\partial\phi_{II}}{\partial z}\right)_{z=z'} = 4\pi\sigma(\rho,\varphi)$$

Aquí $\sigma(\rho,\varphi)$ será la densidad superficial de carga para una carga puntual de magnitud $q$ situada en $\rho'$ y $\varphi'$, o sea

$$\sigma(\rho,\varphi) = q\delta(\rho-\rho')\frac{\delta(\varphi-\varphi')}{\rho}$$

donde el $\rho$ que aparece en el denominador es el Jacobiano de las cooredenadas cilíndricas. Luego la condición mencionada se escribe

$$\int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty 2k\tilde{A}_n(k)J_{\nu_n}(k\rho)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right) = \frac{4\pi q}{\rho}\delta(\rho-\rho')\delta(\varphi-\varphi')$$

Multiplicamos a ambos lados por $J_{\nu_n}(k'\rho)\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\right)$, e integramos en $\int_0^\infty d\rho$ y $\int_0^\alpha d\varphi$. Utilizando las siguientes relaciones de ortogonalidad

$$\begin{cases} \int_0^\infty d\rho\ \rho J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \frac{1}{k}\delta(k-k') \\ \int_0^\alpha d\varphi\ \sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)\sin\left(\frac{m\pi}{\alpha}\varphi\right) = \frac{\alpha}{2}\delta_{nm} \end{cases}$$

y despejando, obtenemos que el coeficiente es

$$\tilde{A}_n(k) = \frac{4\pi q}{\alpha}J_{\nu_n}(k\rho')\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi'\right)$$

Finalmente, poniendo $q = 1$ obtenemos la función de Green buscada

$$G_\alpha(\rho,\varphi,z,\rho',\varphi',z') = \frac{4\pi}{\alpha}\int_0^\infty dk \sum_{n=1}^\infty J_{\nu_n}(k\rho)J_{\nu_n}(k\rho')\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi'\right)e^{-k|z-z'|}$$

**b)** En el caso $\alpha = \pi$, obtenemos la función de Green en $y \geq 0$, para el caso de un plano a tierra en $y = 0$

$$G_\pi(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = 4 \int_0^\infty dk \sum_{n=1}^{\infty} J_n(k\rho) J_n(k\rho') \sin(n\varphi) \sin(n\varphi') \, e^{-k|z-z'|}$$

donde ahora los $\nu$ son enteros.

**c)** Conocemos la función de Green para todo el espacio, la cual se puede escribir como

$$G(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = \int_0^\infty dk \left[ J_0(k\rho) J_0(k\rho') + 2 \sum_{\nu>0} J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') \cos[\nu(\varphi - \varphi')] \right] e^{-k|z-z'|}$$

Para hallar la función de Green del problema de Dirichlet para $y \geq 0$, utilizamos el método de imagenes. Si tenemos una carga $q$ en $(\rho', \varphi', z')$, su imagen será una carga $-q$ reflejada respecto del plano $y = 0$, o sea situada en $(\rho', -\varphi', z')$. Entonces tenemos

$$G_\pi(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = G(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') - G(\rho, \varphi, z, \rho', -\varphi', z') =$$
$$= 2 \int_0^\infty dk \sum_{\nu>0} J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') \left\{ \cos[\nu(\varphi - \varphi')] - \cos[\nu(\varphi + \varphi')] \right\} e^{-k|z-z'|}$$

**d)** Finalmente queremos ver que las funciones de Green $G_\pi$ halladas en los incisos **b)** y **c)** son equivalentes. Para ello desarrollamos el coseno de la suma

$$\cos[\nu(\varphi \pm \varphi')] = \cos(\nu\varphi)\cos(\nu\varphi') \mp \sin(\nu\varphi)\sin(\nu\varphi')$$

luego

$$\cos[\nu(\varphi - \varphi')] - \cos[\nu(\varphi + \varphi')] = 2\sin(\nu\varphi)\sin(\nu\varphi')$$

y entonces reescribimos la expresión obtenida en el inciso anterior como

$$G_\pi(\rho, \varphi, z, \rho', \varphi', z') = 4 \int_0^\infty dk \sum_{\nu>0} J_\nu(k\rho) J_\nu(k\rho') \sin(\nu\varphi) \sin(\nu\varphi') e^{-k|z-z'|}$$

la cual es la misma que en el inciso **b)**, cambiando $\nu$ por $n$.