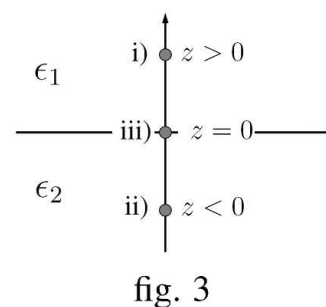
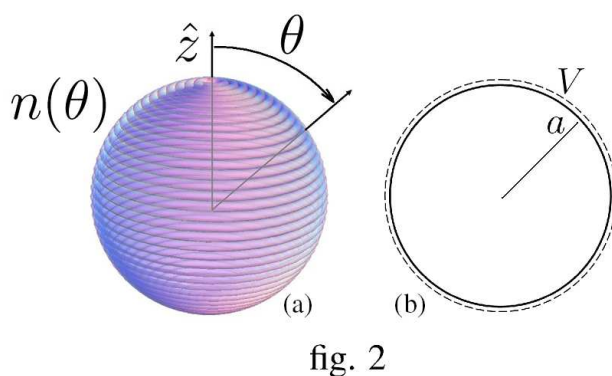
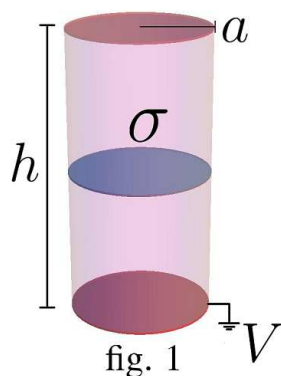


Enunciados y soluciones:



**Problema 1:** Un cilindro circular recto de radio  $a$  y altura  $h$  está a potencial  $V$  (fig. 1). A mitad de su altura hay un disco del mismo radio  $a$ , cargado con densidad de carga superficial  $\sigma$ . Encuentre el potencial electrostático dentro del cilindro.

**Solución:** Por superposición, sumando a un potencial  $V$  constante, dentro del cilindro, el potencial  $\Phi_0$  del disco con el cilindro a tierra. Poniendo el origen en el centro del cilindro, puede escribirse

$$\Phi_0(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \left[ \frac{x_n}{a} \left( \frac{h}{2} - |z| \right) \right] J_0 \left( \frac{x_n}{a} \rho \right). \quad (1)$$

Aquí ya se usó continuidad. El salto en la derivada normal da

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2 \frac{x_n}{a} A_n \cosh \left[ \frac{x_n}{a} \frac{h}{2} \right] J_0 \left( \frac{x_n}{a} \rho \right) = 4\pi \sigma. \quad (2)$$

Usando

$$\int_0^a d\rho \rho J_0 \left( \frac{x_n}{a} \rho \right) J_0 \left( \frac{x_{n'}}{a} \rho \right) = \frac{a^2}{2} [J_1(x_n)]^2 \delta_{n,n'}, \quad (3)$$

y

$$\int d\rho \rho J_0(\rho) = \rho J_1(\rho), \quad (4)$$

queda

$$A_n = 4\pi\sigma a \left\{ x_n^2 \cosh \left[ \frac{x_n h}{2a} \right] J_1(x_n) \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Luego es  $\Phi(\mathbf{r}) = V + \Phi_0(\mathbf{r})$ . Si se elige otro punto sobre el eje  $z$  como origen de coordenadas, el resultado varía en consecuencia. Por ejemplo, con la base del cilindro en  $z = 0$ , la función  $\sinh[k(h/2 - |z|)]$  debe reemplazarse por  $\sinh[k(h/2 - |z - h/2|)]$ , y, según sea  $z$  mayor o menor que  $h/2$ , aparecerá  $\sinh[k(h - z)]$  o  $\sinh[kz]$ , respectivamente. El resto de los términos en  $\Phi_0$  permanece igual.

**Problema 2:** Una esfera magnetizable de radio  $a$  y permeabilidad  $\mu$  está cubierta por un arrollamiento de cable que transporta una corriente constante  $I$  y que tiene  $n(\theta)$  vueltas por unidad de longitud (fig. 2 a). La función  $n(\theta)$  es tal que dentro de la esfera el campo magnético es uniforme  $B_0\hat{z}$ , y fuera es el campo de un dipolo  $m$  orientado en la dirección  $\hat{z}$ .

- ¿Cuál es la función  $n(\theta)$ ? Tómese como dato  $n(\pi/2) = n_0$ .
- Escriba  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{H}$  en todo el espacio en términos de  $n_0$ ,  $I$ ,  $\mu$  y  $a$ . ¿Cuánto valen  $B_0$  y  $m$ ?
- Considere ahora que la corriente  $I$  es una función de  $t$ , cuyo tiempo característico de evolución es  $\tau$ , es decir  $\dot{I} \sim I/\tau$ . ¿Qué condición debe satisfacer  $\tau$  para que tenga sentido aplicar la aproximación cuasiestacionaria?
- Encuentre  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{B}$  en la aproximación cuasiestacionaria.
- Verifique explícitamente que a primer orden en  $1/\tau$  se cumple el teorema de Poynting

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_V dr^3 \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = - \oint \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \hat{n} da, \text{ con } u = \int_V dr^3 \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}),$$

para el volumen  $V$  limitado por una esfera de radio apenas mayor que  $a$  (fig. 2 b).

**Solución:** (a) La idea de este ítem era proceder a la inversa de lo que uno habitualmente hace. En lugar de partir de las fuentes y de las condiciones de contorno para averiguar los campos, partir de los campos y de las condiciones de contorno para obtener las fuentes. El campo dentro de la esfera es

$$\mathbf{B}_1 = B_0 \hat{z} \quad (6)$$

y fuera

$$\mathbf{B}_2 = \frac{m}{r^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}]. \quad (7)$$

La continuidad de  $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}$  y el salto en  $\mathbf{H} \times \mathbf{n}$  dan las ecuaciones necesarias para determinar  $n(\theta)$ . Hay que usar además que  $\boldsymbol{\kappa} = n(\theta)I \hat{\phi}$ , entonces:

$$\begin{aligned} B_0 \hat{z} \cdot \hat{r} &= \frac{m}{a^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}] \cdot \hat{r} \\ \rightarrow B_0 &= \frac{2m}{a^3} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} B_0 \hat{z} \times \hat{r} - \frac{m}{a^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}] \times \hat{r} &= \frac{4\pi}{c} n(\theta) I \hat{\phi} \\ \rightarrow n(\theta) &= \left( \frac{\mu + 2}{\mu} \right) \frac{mc}{4\pi a^3 I} \text{sen } \theta, \end{aligned} \quad (9)$$

con la condición  $n(\pi/2) = n_0$ , resulta

$$n(\theta) = n_0 \text{sen } \theta \quad (10)$$

y

$$m = \frac{4\pi a^3 \mu}{\mu + 2} \frac{I n_0}{c}. \quad (11)$$

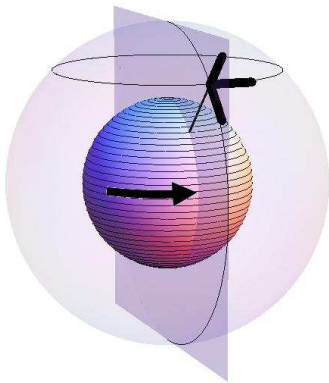
(b) Dentro de la esfera es  $\mathbf{H} = B_0 \hat{z} / \mu$ , fuera,  $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ .

(c) La aproximación cuasiestacionaria estará justificada cuando la longitud típica del sistema,  $a$ , sea mucho menor que la longitud de onda asociada al campo electromagnético,  $\lambda = c\tau$ . Eso significa que debe ser  $a \ll c\tau$ . Yendo hacia atrás en el argumento, puede decirse que, si vale lo anterior, la aproximación podrá extenderse fuera de la esfera siempre que  $r \ll c\tau$ .

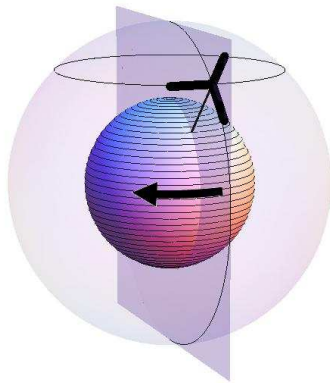
(d) El campo magnético en la aproximación cuasiestacionaria sigue estando dado por las mismas expresiones de antes. El campo  $\mathbf{E}$  tiene que satisfacer

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\dot{\mathbf{B}}.\end{aligned}\quad (12)$$

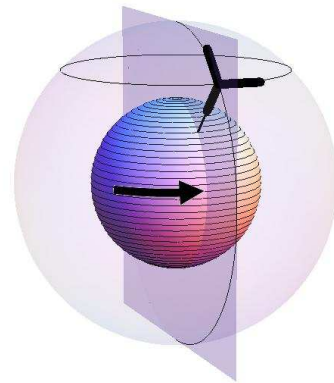
Es fácil ver que  $\mathbf{E}$  sólo puede tener componentes en la dirección  $\hat{\phi}$ : dado un punto  $\mathbf{r} = r\hat{r}$ , reflejando por un plano vertical que contenga  $\hat{r}$  y luego invirtiendo el signo de la corriente, el sistema permanece invariante, pero las componentes en  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  del campo  $\mathbf{E}$  se invierten: la reflexión las deja invariantes, pero el cambio de signo de la corriente las multiplica por  $-1$  (ver figura).



El sistema original. En un punto dado se indican las tres componentes de  $\mathbf{E}$ .



El sistema reflejado. Las componentes en  $\hat{r}$  y  $\hat{\theta}$  de  $\mathbf{E}$  permanecen invariantes; la tercera componente cambia de signo.



El sistema reflejado y con el signo de la corriente cambiado. Este sistema coincide con el original. De las tres componentes de  $\mathbf{E}$  sólo la que está en  $\hat{\phi}$  puede ser distinta de cero.

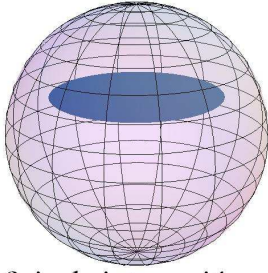
Dentro de la esfera,  $\mathbf{E}$  se obtiene aplicando Ampère sobre un disco de radio  $r \sin \theta$  (ver figura abajo)

$$\begin{aligned}2\pi(r \sin \theta) E_1 &= -\frac{1}{c}\dot{B}_0 \pi (r \sin \theta)^2 \\ \rightarrow E_1 &= -\frac{\dot{B}_0}{2c} r \sin \theta = -\frac{\dot{m}}{ca^3} r \sin \theta \\ \rightarrow \mathbf{E}_1 &= -\frac{\dot{m}}{ca^3} \hat{z} \times \mathbf{r}.\end{aligned}\quad (13)$$

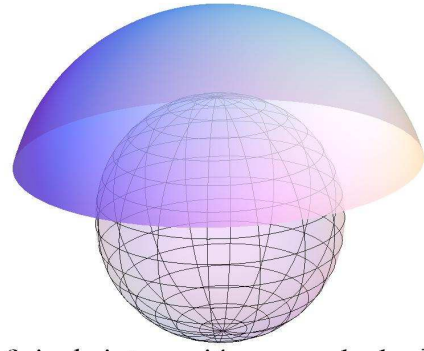
Para calcularlo afuera conviene tomar como superficie un casquete, no un disco. Ahí queda

$$\begin{aligned}2\pi(r \sin \theta) E_2 &= -\frac{1}{c} \frac{\dot{m}}{r^3} 2\pi r^2 \int_{\cos \theta}^1 d(\cos \theta') [3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}] \cdot \hat{r} = -\frac{2\pi}{cr} (\sin \theta)^2 \\ \rightarrow E_2 &= -\frac{\sin \theta}{cr^2} \dot{m} \\ \rightarrow \mathbf{E}_2 &= -\frac{\hat{z} \times \hat{r}}{cr^2} \dot{m}.\end{aligned}\quad (14)$$

Notar que en  $r = a$ ,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ , como debía ser, puesto que al no haber cargas libres ni dieléctricos, las tres componentes de  $\mathbf{E}$  son continuas (aunque en este caso sólo haya componente tangencial).



Superficie de integración para calcular  $\mathbf{E}$  dentro de la esfera: es un disco de radio  $r \sin \theta$ .



Superficie de integración para calcular  $\mathbf{E}$  fuera de la esfera: es un casquete esférico de ángulo  $\theta$  y radio  $r$ .

Un segundo método para calcular el campo eléctrico fuera de la esfera explota únicamente la forma de la ecuación para el rotor de  $\mathbf{E}$ . Se tiene

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\frac{1}{c} \frac{\dot{m}}{r^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r})\hat{r} - \hat{z}]. \quad (15)$$

Pero como lo que está a la derecha sigue teniendo la forma del campo producido por un "dipolo", de valor  $-\dot{m}/c$ , es posible escribir ese término como el rotor de un campo vectorial  $\mathbf{A}$ . Ahora bien, se sabe que para un dipolo  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{A}$  puede elegirse como  $\mathbf{m} \times \hat{r}/r^2$ , y este  $\mathbf{A}$  satisface  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Entonces

$$\nabla \times \mathbf{E}_2 = \nabla \times \left[ -\frac{1}{c} \frac{\dot{m} \hat{z} \times \hat{r}}{r^2} \right]. \quad (16)$$

Así, los términos dentro de los rotores a cada lado de la ecuación sólo pueden diferir en el gradiente de un campo,

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{1}{c} \frac{\dot{m} \hat{z} \times \hat{r}}{r^2} + \nabla f. \quad (17)$$

Notar primero que al ser  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ , la ecuación  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$  implica  $\nabla^2 f = 0$ . Además, en  $r = a$ ,  $\mathbf{E}_2$  tiene que ser igual a  $\mathbf{E}_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_2 &= \mathbf{E}_1 \Big|_{r=a} \\ \rightarrow -\frac{1}{c} \frac{\dot{m} \hat{z} \times \hat{r}}{a^2} + \nabla f(a) &= -\frac{1}{c} \frac{\dot{m} \hat{z} \times \hat{r}}{a^2}, \end{aligned} \quad (18)$$

y esto significa que  $\nabla f(a) = 0$ . Pidiendo que  $f \rightarrow 0$  para  $r \rightarrow \infty$ , la solución del problema  $\nabla^2 f = 0$ , con esas dos condiciones de contorno, es  $f = 0$ , y la expresión para  $\mathbf{E}_2$  coincide con la encontrada antes.

(e) Para verificar el teorema de Poynting hay que calcular los tres términos que intervienen en su formulación, siempre hasta primer orden en  $1/\tau$ :

i) El término de la densidad de energía del campo  $u = \frac{1}{8\pi} \frac{4\pi a^3}{3} \frac{1}{\mu} B_0^2$ ,

$$\rightarrow \dot{u} = \frac{1}{8\pi} \left( \frac{4\pi a^3}{3\mu} \right) \frac{dB_0^2}{dt} = \frac{2}{3\mu a^3} \frac{dm^2}{dt}. \quad (19)$$

ii) El término del trabajo de los campos

$$\begin{aligned} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d^3r &= \int d\Omega a^2 \mathbf{E}_2(a, \theta) \cdot \boldsymbol{\kappa} = 2\pi a^2 \int_{-1}^1 d(\cos \theta) \left[ -\frac{\text{sen } \theta}{ca^2} \dot{m} \right] \left[ \frac{c(\mu + 2)}{4\pi a^3 \mu} m \text{sen } \theta \right] \\ &= -\frac{\mu + 2}{3\mu a^3} \frac{dm^2}{dt}. \end{aligned} \quad (20)$$

iii) El término del flujo de energía

$$\begin{aligned} \mathbf{S} \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} &= \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E}_2 \times \mathbf{B}_2) \cdot \hat{r} \Big|_{r=a} = \frac{c}{4\pi} \left\{ \left[ \left( -\frac{\text{sen } \theta}{ca^2} \right) \dot{m} \hat{\varphi} \right] \times \frac{m}{a^3} [3(\hat{z} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \hat{z}] \right\} \cdot \hat{r} \\ &= \frac{1}{4\pi a^5} \frac{1}{2} \frac{dm^2}{dt} (\text{sen } \theta)^2 \\ \rightarrow \oint \mathbf{S} \cdot \hat{r} da &= \frac{1}{3a^3} \frac{dm^2}{dt}. \end{aligned} \quad (21)$$

La suma de los dos primeros es igual al tercero con signo menos.

**Problema 3:** El plano  $z = 0$  divide al espacio en dos regiones, una con permitividad  $\epsilon_1$  y la otra con  $\epsilon_2$  (fig. 3).

- Deduzca, copie de un libro, adivine o conjeture el potencial electrostático en todo el espacio para una carga de valor  $q$  ubicada sobre el eje  $z$ , contemplando las tres alternativas posibles: i)  $z > 0$ , ii)  $z < 0$  y iii)  $z = 0$ .
- Considere el potencial  $\Phi_z(\mathbf{r})$  producido en  $\mathbf{r}$  por la carga ubicada en  $z \hat{z}$ . A partir de las expresiones encontradas en el ítem anterior, halle el  $\lim_{z \rightarrow 0^+} \Phi_z(\mathbf{r})$  y el  $\lim_{z \rightarrow 0^-} \Phi_z(\mathbf{r})$ . Compárelos entre sí y con la expresión de  $\Phi_0(\mathbf{r})$ . ¿Es necesario considerar  $z = 0$  como un caso separado?
- Usando los resultados anteriores, siguiendo el procedimiento de límite que considere más práctico, encuentre el potencial electrostático en todo el espacio producido por un dipolo puntual ubicado en  $\mathbf{r} = 0$ . ¿Depende la solución del modo en que se hagan tender las cargas a la interfase?

**Solución:** (a) Conviene escribir el potencial separando en dos regiones: región (I) si el punto campo tiene  $z \geq 0$ , y (II), si el punto campo tiene  $z < 0$ . El potencial puede escribirse en cada región como la suma de los potenciales de 1 o 2 cargas, dependiendo de la posición de la carga fuente. Cuando el potencial se escribe como la suma de los potenciales de dos cargas, la segunda carga está en la posición  $-z\hat{z}$ . Ahora hay que analizar caso por caso:

i) Carga en  $z > 0$ :

Región I:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_1} \frac{1}{|\mathbf{r} - z\hat{z}|} + \frac{q}{\epsilon_1} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} + z\hat{z}|}. \quad (22)$$

Región II:

$$\Phi = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - z\hat{z}|}. \quad (23)$$

ii) Carga en  $z < 0$ . Es igual al anterior, cambiando  $\epsilon_1$  por  $\epsilon_2$  y la región I por la región II:

Región I:

$$\Phi = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - z\hat{z}|}. \quad (24)$$

Región II:

$$\Phi = \frac{q}{\epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r} - z\hat{z}|} + \frac{q}{\epsilon_2} \left( \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \frac{1}{|\mathbf{r} + z\hat{z}|}. \quad (25)$$

iii) Carga en  $z = 0$ . Aquí conviene resolver directamente, separando variables en cartesianas,

$$\Phi = \int d^2k e^{i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho}} A(\mathbf{k}) e^{-k|z|}, \quad (26)$$

y usando salto de  $D_z$  queda

$$(\epsilon_1 + \epsilon_2) k A(\mathbf{k}) = 4\pi \frac{q}{(2\pi)^2} \rightarrow A(\mathbf{k}) = \frac{q}{\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)k}. \quad (27)$$

Cuando  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$  debe obtenerse el potencial de una carga puntual  $q$ , de manera que escribiendo

$$A(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi k} \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \quad (28)$$

uno puede identificar el potencial producido por la carga en  $\mathbf{r} = 0$  con el de una carga de valor  $q' = 2q/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$ ,

$$\Phi = \frac{2q}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{|\mathbf{r}|}, \quad (29)$$

y esta expresión es válida tanto en la región I como en la II.

(b) Para calcular el límite de  $\Phi_z(\mathbf{r})$  cuando  $z$  tiende a cero desde valores positivos, hay que usar las expresiones de  $\Phi$  del caso (i). Primero, en la región I queda

$$\begin{aligned} \Phi &\simeq \frac{q}{\epsilon_1 r} \left( 1 + \frac{z}{r} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) + \frac{q}{\epsilon_1 r} \left( \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) \left( 1 - \frac{z}{r} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \\ &= \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} + \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2} \left( \frac{2\epsilon_2/\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) (zq). \end{aligned} \quad (30)$$

Conservamos el último término porque va a ser útil al resolver el ítem (c). Finalmente, si  $qz \rightarrow 0$  queda

$$\Phi \rightarrow \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r}. \quad (31)$$

Por otro lado, en la región II resulta

$$\Phi \simeq \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2) r} \left( 1 + \frac{z}{r} \hat{z} \cdot \hat{r} \right), \quad (32)$$

y esto tiende a

$$\Phi \rightarrow \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r}. \quad (33)$$

De manera que con estos dos resultados se recupera el caso (iii) de la carga en el origen.

Para analizar el otro límite no hay que hacer ninguna cuenta más. Este caso es equivalente al anterior cambiando  $\epsilon_1$  por  $\epsilon_2$  y la región I por la II. En la región I queda

$$\Phi \simeq \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r} \left( 1 + \frac{z}{r} \hat{z} \cdot \hat{r} \right) \rightarrow \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r}, \quad (34)$$

mientras que en la región II

$$\Phi \simeq \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r} + \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2} \left( \frac{2\epsilon_1/\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) (zq) \rightarrow \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r}. \quad (35)$$

En conclusión: sea que uno acerque la carga al origen desde los  $z$ 's positivos o negativos, siempre se obtiene como resultado el potencial de la carga en el origen.

(c) El potencial del dipolo en el origen no necesariamente va a ser independiente de la forma en que uno acerque las dos cargas. Ahora van a importar los términos que antes, al tomar los límites, se asumieron despreciables, es decir, hay que considerar que  $|qz|$  tiende a un valor finito distinto de cero.

De todas las formas posibles de construir el dipolo aquí se analizan tres (ver figura más abajo), aunque era suficiente considerar dos que dieran distinto:

- (1) Carga  $q$  en  $z > 0$  y carga  $-q$  en el origen, con  $qz \rightarrow p$ . A partir de las expresiones obtenidas antes, en la región I queda

$$\Phi = \left( \frac{2\epsilon_2/\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) p \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad (36)$$

y en la región II

$$\Phi = \frac{2p}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (37)$$

- (2) Carga  $q$  en el origen y carga  $-q$  en  $z < 0$  con  $q|z| \rightarrow p$ . De nuevo, este caso se obtiene a partir del caso anterior intercambiando los  $\epsilon$ 's y las regiones. En la región I

$$\Phi = \frac{2p}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}, \quad (38)$$

y en la región II

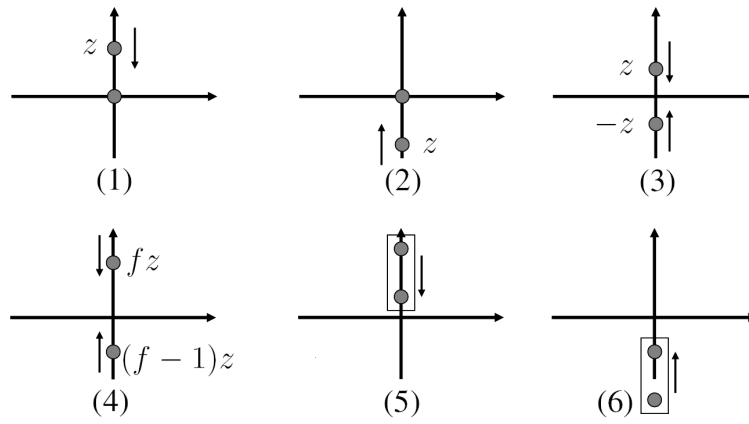
$$\Phi = \left( \frac{2\epsilon_1/\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) p \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (39)$$

- (3) Carga  $q$  en  $z > 0$  y carga  $-q$  en  $-z$ , con  $2qz \rightarrow p$ . Este es el caso más simétrico. En la región I queda

$$\Phi = \left[ \left( \frac{2\epsilon_2/\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right) + \frac{2q}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right] (qz) \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{p}{\epsilon_1} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (40)$$

En la región II es lo mismo cambiando los  $\epsilon$ 's,

$$\Phi = \frac{p}{\epsilon_2} \frac{\hat{z} \cdot \hat{r}}{r^2}. \quad (41)$$



Distintos modos de construir un dipolo en el origen: las formas (1)-(3) se han considerado en detalle dentro del texto. La forma (4) es la generalización de esas 3, en tanto que la (5) y la (6) se reducen a los casos (1) y (2).

Como conclusión: el potencial del dipolo en el origen depende de la forma en que se lo construya. Es fácil ver que los tres casos anteriores son casos particulares de un método más general de construir el dipolo, que consiste en ubicar la carga  $q$  en  $fz$  y la carga  $-q$  en  $(f-1)z$ , con  $0 \leq f \leq 1$ . El caso (1) corresponde a  $f = 1$ , el (2) a  $f = 0$  y el (3) a  $f = 1/2$ . Para este caso general, en la región I es

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right) f + 1 \right] \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}, \quad (42)$$

y en la región II,

$$\Phi = 2 \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \left[ \left( \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1 \right) f + 1 \right] \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)r^2}. \quad (43)$$

La relación entre las expresiones para el potencial en I y en II es siempre un factor  $\epsilon_1/\epsilon_2$ .

Como últimos comentarios: otra forma de construir el dipolo es con las dos cargas acercándose al origen desde  $z > 0$  o  $z < 0$ . Puede verse que estos casos se reducen al (1) y al (2), respectivamente. Como verificación adicional, se puede analizar si el método (1) reproduce el potencial de un dipolo sobre un conductor cuando  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ : en efecto, ahí el potencial es cero en la región II, y es el de un dipolo  $2p$  en la región I, que es el mismo resultado de aplicar imágenes para un plano conductor.