Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2015 – segundo parcial, con las soluciones

■ **Problema 1**. Desde el detector D en la figura puede seguirse el paso de partículas cargadas a lo largo de un pequeño segmento del eje z. El segmento tiene longitud a y está centrado en el origen. Las partículas viajan hacia la derecha. El detector está fijo a una distancia del origen $R \gg a$, forma un ángulo α con el eje z y es sensible a la intensidad de la radiación electromagnética. Las partículas se mueven a lo largo del eje z con una velocidad y una aceleración que pueden considerarse constantes durante el breve intervalo de tiempo que tardan en cruzar el segmento observado desde D. A tiempo t se detecta en D el paso de una partícula, en la forma de un flash de duración τ e intensidad I.

a) ¿Cuánto vale la velocidad aparente $\boldsymbol{\beta}_{\rm ap} = \beta_{\rm ap}\,\hat{z}$ de la partícula vista desde D? (1 pt)

b) Suponga que conoce la carga q de la partícula y su aceleración aparente $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap} = \dot{\beta}_{\rm ap}\,\hat{z}$ vista desde D, con un error a lo sumo de orden $1/R$. Con la misma precisión, ¿cuál es la aceleración retardada? (3 pts)

c) Encuentre el campo eléctrico de radiación $\mathbf{E}_{\rm rad}(\varphi, \theta)$ a tiempo t sobre todos los puntos de una esfera de radio R centrada en el origen. Ojo, t no es un tiempo genérico, es el tiempo al que se detecta en D el paso de la partícula. (3 pts)

d) Suponga que no conoce ni la carga ni la aceleración de la partícula, pero que puede medir la intensidad I de la radiación en el detector D. ¿Cuánto vale el producto $|q\dot{\beta}_{\rm ap}|$? (2 pts)

e) ¿Cómo podría averiguar, mediante otras mediciones hechas en D, el signo de $q\dot{\beta}_{\rm ap}$? ¿Es posible obtener a través del campo de radiación información sobre el signo de q y $\dot{\beta}_{\rm ap}$ por separado? (1 pt)

■ **Solución**. La idea del problema era reconstruir el campo de radiación sobre toda una esfera a partir de lo que mide un único detector en una dirección particular. En lugar de saturar el problema pidiendo que dedujeran todo a partir de la intensidad y del tiempo de paso de la imagen de la partícula, los ítems se fueron escalonando. Así el ítem (b) supone conocida la aceleración aparente, lo que sería muy difícil de medir de manera directa, pero luego los ítems (d) y (e) indican cómo podría medirse $\dot{\beta}_{\rm ap}$ a partir de la intensidad, o al menos, cómo podría determinarse el producto $q\dot{\beta}_{\rm ap}$. En la práctica se dedicó mucho tiempo al tema de las trayectorias aparentes, y además se dijo explícitamente que la relación entre aceleración aparente y retardada era un problema que nos gustaría incluir en el parcial. En la página publicamos un enunciado posible y su solución. El problema es atípico para lo que es la materia históricamente, pero no para el curso del segundo cuatrimestre de 2015. Por eso también les recordamos por mail que miraran la página de la materia, para prevenir a aquellos que hubieran cursado las prácticas de otros cuatrimestres. Al final, así y todo apenas 4 alumnos (de 24) aprobaron el problema y sólo 1 lo hizo aceptablemente bien.

a) Visto desde el detector, el paso de la partícula a través del segmento de longitud a toma un tiempo τ. Dicho en otras palabras, la imagen de la partícula recorre una distancia a en un tiempo τ. Luego, su velocidad aparente es

$$\beta_{\rm ap} = \frac{a}{c\tau}. \tag{1}$$

b) La relación entre la velocidad aparente y la retardada es

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1+\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\cdot\mathbf{n}_{\rm ap}(t)} = \kappa(t)\,\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t), \tag{2}$$

donde $\mathbf{n}_{\rm ap}$ es el versor que va desde la posición aparente hasta el punto de observación,

$$\mathbf{n}_{\rm ap}(t) = \frac{\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}(t)}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}(t)|}. \tag{3}$$

Así, la aceleración retardada es

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \frac{dt}{dt'}\,\frac{d}{dt}\left[\kappa(t)\,\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\right]. \tag{4}$$

Ahora bien,

$$\frac{dt}{dt'} = \kappa,$$

$$\frac{d\kappa(t)}{dt} = -\kappa(t)^2\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}(t)\cdot\mathbf{n}_{\rm ap}(t) + \boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\cdot\dot{\mathbf{n}}_{\rm ap}(t)\right]. \tag{5}$$

Pero, por otro lado,

$$\dot{\mathbf{n}}_{\rm ap} = -\frac{c\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}|} + \frac{c\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\cdot\mathbf{n}_{\rm ap}}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_{\rm ap}|}\,\mathbf{n}_{\rm ap} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{R}\right). \tag{6}$$

De modo que, con precisión de orden R^{-1}, es $\dot{\mathbf{n}} = 0$. Entonces,

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \kappa(t)\left[\kappa\,\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap} - \kappa^2\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}\cdot\mathbf{n}_{\rm ap}\right)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\right]_t. \tag{7}$$

Con la misma precisión puede reemplazarse $\mathbf{n}_{\rm ap}$ por $\hat{R}$. Finalmente resulta

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \kappa(t)^2\left[\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap} - \kappa\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}\cdot\hat{R}\right)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\right]_t, \tag{8}$$

donde, con el mismo grado de aproximación,

$$\kappa = \frac{1}{1+\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\cdot\hat{R}} = \frac{1}{1+\beta_{\rm ap}\cos\alpha}. \tag{9}$$

Por otro lado, despreciando términos de orden R^{-1}, la ec. (2) se escribirá como

$$\boldsymbol{\beta}(t') = \frac{\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)}{1+\beta_{\rm ap}(t)\cos\alpha}. \tag{10}$$

La ec. (8) vale en general. Según las condiciones del problema, la aceleración y la velocidad son paralelas, así que podemos escribir

$$\left(\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}\cdot\hat{R}\right)\boldsymbol{\beta}_{\rm ap} = \left(\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}\cdot\hat{R}\right)\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}, \tag{11}$$

y entonces

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \kappa(t)^2 \left[1 - \kappa \left(\boldsymbol{\beta}_{\rm ap} \cdot \hat{R}\right)\right]_t \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}(t). \tag{12}$$

Lo que está entre corchetes es $1 - \kappa(\kappa^{-1} - 1) = \kappa$. Por lo tanto, el resultado final es

$$\dot{\boldsymbol{\beta}}(t') = \kappa(t)^3 \, \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}(t) = \frac{\dot{\beta}_{\rm ap}(t)}{[1 + \beta_{\rm ap}(t)\cos\alpha]^3}\,\hat{z}. \tag{13}$$

Obviamente este resultado puede obtenerse sin usar la ec. (11), basta con reemplazar en la ec. (8) lo que es cada cosa.

Debido a que las únicas velocidades y aceleraciones aparentes del problema son las que se observan a tiempo t, en lo que sigue escribiremos directamente $\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}$, sin indicar la dependencia con t.

c) Las aceleraciones aparentes y retardadas siempre están referidas a un punto de observación particular. Si lo que se quiere es calcular los campos de radiación mediante la fórmula

$$\mathbf{E}_{\rm rad} = \frac{q}{cR}\hat{R} \times \left(\hat{R} \times \dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}\right), \tag{14}$$

no puede usarse el dato de la aceleración aparente $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}$ a tiempo t en el punto $\mathbf{R}$ para calcular el campo en otro punto que no sea $\mathbf{R}$ y a tiempo t. Con los datos que tenemos hasta ahora, la fórmula anterior sólo puede aplicarse de manera inmediata para calcular los campos en D.

Lo que pedía el enunciado era calcular el campo de radiación a tiempo t sobre una esfera de radio $R \gg a$. Piensen esto: el flash de radiación de la carga que pasa por el origen (despreciando la pequeña longitud del segmento a) llega a todos los puntos de esa esfera al mismo tiempo t, porque todos están a la misma distancia del origen. De modo que estos puntos, si bien no comparten los mismos valores de $\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}$, tienen en común los mismos valores de las cantidades retardadas $\boldsymbol{\beta}(t')$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t')$, porque todo lo que importa es que t' sea el mismo para todos.

El campo eléctrico de radiación sobre la esfera de radio R a tiempo t es

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r}) = \frac{q}{cR}\,\hat{r} \times \left[\frac{(\hat{r} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \hat{r})^3}\right]_{t'}. \tag{15}$$

Teniendo en cuenta que $\boldsymbol{\beta}$ y $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ son paralelas, reemplazando el resultado del ítem anterior, ec. (13), y sustituyendo $\boldsymbol{\beta}(t')$ por su expresión en términos de $\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}$, ec. (10), queda

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{r}) = \frac{q}{cR}\,\hat{r} \times (\hat{r} \times \hat{z})\,\frac{\dot{\beta}_{\rm ap}}{\left[(1 + \beta_{\rm ap}\cos\alpha)\left(1 - \dfrac{\hat{z} \cdot \hat{r}\,\beta_{\rm ap}}{1 + \beta_{\rm ap}\cos\alpha}\right)\right]^3}. \tag{16}$$

Definiendo $\mathbf{r}$ a través de sus coordenadas esféricas, resulta

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\varphi,\theta) = \frac{q}{cR}\,\frac{\dot\beta_{\text{ap}}\,\sin\theta\,\hat\theta}{\left[1+\beta_{\text{ap}}(\cos\alpha-\cos\theta)\right]^3}. \tag{17}$$

Notar que el único caso en que esta expresión se reduce a la fórmula del campo en términos de la aceleración aparente,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{cR}\,\hat R\times(\hat R\times\dot{\boldsymbol\beta}_{\text{ap}}), \tag{18}$$

se da cuando $\theta=\alpha$, es decir sólo en la dirección del detector. Es natural que así sea, puesto que la aceleración aparente $\dot{\boldsymbol\beta}_{\text{ap}}$ está referida al detector (y, por simetría, a los puntos del anillo definido por $\theta=\alpha$).

d) La intensidad de la radiación en el detector a tiempo t es

$$I = \frac{c}{4\pi}R^2\,|\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{c}\right)^2|\hat R\times\dot{\boldsymbol\beta}_{\text{ap}}|^2 = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{q}{c}\right)^2\sin^2\alpha\;\dot\beta_{\text{ap}}^2. \tag{19}$$

Conociendo I puede obtenerse el valor de $|q\dot\beta_{\text{ap}}|$,

$$|q\dot\beta_{\text{ap}}| = \frac{\sqrt{4\pi cI}}{\sin\alpha}. \tag{20}$$

e) El campo de radiación en el detector a tiempo t es

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{cR}\dot\beta_{\text{ap}}\sin\alpha\;\hat\theta. \tag{21}$$

El signo de $q\dot\beta$ podría determinarse midiendo el campo sobre la dirección $\hat\theta$. En la expresión del campo de radiación sólo importa el producto $q\dot\beta_{\text{ap}}$, de modo que no es posible extraer información sobre el signo de cada término por separado, ni sobre sus valores.

■ **Problema 2**. En el sistema de laboratorio (sistema S) un medio dieléctrico se mueve con velocidad $\mathbf{v}=v\,\hat x$, como muestra la figura. El dieléctrico tiene índice de refracción n y permeabilidad $\mu=1$. A tiempo $t=0$ ocupa todo el semiespacio $x>0$. En S hay una onda plana, de frecuencia ω_i y dirección de propagación $\hat k_i=\hat x$, que incide sobre el dieléctrico. La amplitud del campo eléctrico de la onda incidente es $\mathbf{E}_i=E_i\,\hat z$.

a) Encuentre la onda reflejada y la onda transmitida en S. Esto es, dar para cada onda su frecuencia, vector de onda y amplitudes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$. (7 pts)

b) Para este caso de incidencia normal: ¿cuál es la relación de dispersión $|\mathbf{k}_t(\omega_t)|$ para la onda transmitida? Es decir, la relación análoga a la que vale en un medio en reposo, $|\mathbf{k}(\omega)|=n\omega/c$. (1.5 pts)

c) ¿Cuál es la relación entre los módulos* de $\mathbf{E}_t$ y $\mathbf{B}_t$? Verificar que $\mathbf{k}_t\times\mathbf{E}_t=\dfrac{\omega_t}{c}\,\mathbf{B}_t$. (1.5 pts)

*En el enunciado original decía incorrectamente *amplitudes*.

▪ **Solución**. Igual que para el problema 1, habíamos anticipado que en el parcial podíamos tomar algo así. Pero a diferencia del problema 1, en el 2 les fue bastante bien. Lo aprobaron 19, de los cuales 12 lo hicieron de manera más que aceptable.

a) El método más sencillo consistía en resolver el problema en el sistema en donde el dieléctrico está en reposo (S'). Para eso, primero hay transformar la onda incidente al sistema S'.

Los vectores número de onda de las tres ondas pueden determinarse independientemente de sus campos. Debido a que la onda incidente es paralela a la velocidad, su dirección no cambia al pasar de S a S'. En los dos sistemas la incidencia es normal a la superficie del dieléctrico. Con incidencia normal, la onda reflejada y la transmitida se propagarán en la misma dirección que la onda incidente, y eso será válido en los dos sistemas. Teniendo en cuenta que se propaga en el vacío, el cuadrivector número de onda de la onda incidente en el sistema S es ($\omega = \omega_i$)

$$k_i = \frac{\omega}{c}\,(1,1,0,0). \tag{22}$$

La transformación a S' es directa:

$$k_i' = \frac{\omega}{c}\,\Big(\gamma(1-\beta), \gamma(1-\beta), 0, 0\Big) = \gamma(1-\beta)\,\frac{\omega}{c}\,(1,1,0,0). \tag{23}$$

En S' las tres ondas compartirán la misma frecuencia

$$\omega' = \gamma(1-\beta)\,\omega. \tag{24}$$

En S' la onda reflejada tiene cuadrivector número de onda

$$k_r' = \frac{\omega'}{c}\,(1,-1,0,0), \tag{25}$$

de modo que en S resulta

$$k_r = \frac{\omega'}{c}\,\Big(\gamma(1-\beta), \gamma(-1+\beta), 0, 0\Big) = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\,\frac{\omega}{c}\,(1,-1,0,0). \tag{26}$$

Luego la onda reflejada en S tiene frecuencia

$$\omega_r = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\,\omega. \tag{27}$$

La onda transmitida en S' tiene cuadrivector

$$k_t' = \frac{\omega'}{c}\,(1,n,0,0). \tag{28}$$

Transformando a S resulta

$$k_t = \frac{\omega'}{c}\,\Big(\gamma(1+\beta n), \gamma(n+\beta), 0, 0\Big) = \left(\frac{1+\beta n}{1+\beta}\right)\,\frac{\omega}{c}\,\left(1, \frac{n+\beta}{1+\beta n}, 0, 0\right). \tag{29}$$

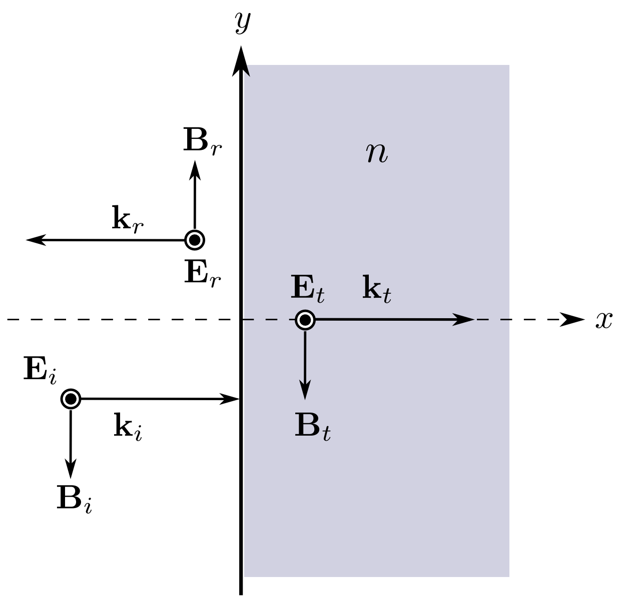
De aquí se lee que la frecuencia de la onda transmitida en S es

$$\omega_t = \left(\frac{1+\beta n}{1+\beta}\right)\,\omega, \tag{30}$$

y que su vector número de onda es

$$\mathbf{k}_t = \left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right)\,\frac{\omega_t}{c}\,\hat{x}. \tag{31}$$

Ahora es el turno de las amplitudes. En los dos sistemas es válida una representación de los campos como la que muestra la figura.



En S la onda incidente tiene un campo eléctrico caracterizado por una amplitud $\mathbf{E}_i = E_i\,\hat{z}$. Puesto que la onda se propaga en la dirección x, la amplitud de su campo magnético es $\mathbf{B}_i = -E_i\,\hat{y}$. Debido a que ningún campo tiene componentes paralelas a la velocidad, el paso al sistema S' se escribe de manera sencilla. En S' la onda incidente estará caracterizada por amplitudes

$$\mathbf{E}_i' = \gamma(\mathbf{E}_i + \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{B}_i) = \gamma(1-\beta)\,E_i\,\hat{z},$$

$$\mathbf{B}_i' = \gamma(\mathbf{B}_i - \boldsymbol{\beta}\times\mathbf{E}_i) = \gamma(-1+\beta)\,E_i\,\hat{y} = -E_i'\,\hat{y}. \tag{32}$$

El resultado para $\mathbf{B}_i'$ era previsible, ya que la onda incidente se propaga en el vacío. En S' las dos ecuaciones que determinan los campos de la onda reflejada y la transmitida son

$$E_i' + E_r' = E_t', \qquad E_i' - E_r' = nE_t', \tag{33}$$

cuya solución es

$$E_t' = \left(\frac{2}{1+n}\right)\,E_i', \qquad E_r' = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)\,E_i'. \tag{34}$$

Para los campos magnéticos vale

$$B'_t = nE'_t, \qquad B'_r = E'_r. \tag{35}$$

Transformando a S, las amplitudes de los campos eléctricos son

$$\mathbf{E}_t = \gamma(\mathbf{E}'_t - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_t) = \gamma(1 + \beta n)E'_t\ \hat{z} = \left(\frac{2}{1+n}\right)\left(\frac{1+\beta n}{1+\beta}\right) E_i\ \hat{z},$$

$$\mathbf{E}_r = \gamma(\mathbf{E}'_r - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_r) = \gamma(1 - \beta)E'_r\ \hat{z} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_i\ \hat{z}. \tag{36}$$

Similarmente, las amplitudes de los campos magnéticos son

$$\mathbf{B}_t = \gamma(\mathbf{B}'_t + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'_t) = \gamma(-n - \beta)E'_t\ \hat{y} = -\left(\frac{2}{1+n}\right)\left(\frac{n+\beta}{1+\beta}\right) E_i\ \hat{y},$$

$$\mathbf{B}_r = \gamma(\mathbf{B}'_r + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'_r) = \gamma(1 - \beta)E'_r\ \hat{y} = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right) E_i\ \hat{y}. \tag{37}$$

b) La ec. (31) contesta la pregunta acerca de la relación de dispersión. Es

$$|\mathbf{k}_t(\omega_t)| = \left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right) \frac{\omega_t}{c}. \tag{38}$$

c) Para la onda transmitida, a partir de las ecs. (36) y (37) resulta

$$|\mathbf{B}_t| = \left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right) |\mathbf{E}_t|. \tag{39}$$

Teniendo en cuenta el resultado del ítem anterior y las direcciones de cada vector, podemos escribir

$$\mathbf{k}_t \times \mathbf{E}_t = \frac{\omega_t}{c}\mathbf{B}_t. \tag{40}$$

Esta ecuación debe valer en todos los sistemas de coordenadas, pues no es otra cosa que la tercera ecuación de Maxwell aplicada a los campos de una onda plana

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \to \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \frac{\omega}{c}\mathbf{B}. \tag{41}$$

De hecho, algunos alumnos usaron esta ecuación para encontrar $\mathbf{B}_t$ sin tener que escribir la transformación del campo magnético. Más interesante fue el caso de un alumno que no transformó ninguno de los campos al sistema S'. Simplemente transformó los cuadrivectores número de onda. De ahí obtuvo la relación

$$|\mathbf{k}_t| = \left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right) \frac{\omega_t}{c}, \tag{42}$$

y, puesto que el coeficiente de proporcionalidad entre $|\mathbf{k}|$ y ω/c es el mismo que hay entre $|\mathbf{E}|$ y $|\mathbf{B}|$, escribió directamente las ecuaciones de continuidad en el sistema S,

$$E_i + E_r = E_t,$$

$$B_i - B_r = B_t \Rightarrow E_i - E_r = \left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right) E_t. \tag{43}$$

A todos los efectos prácticos, puede definirse un índice de refracción efectivo en S

$$n_{\text{ef}} = \frac{n+\beta}{1+\beta n}. \tag{44}$$

El resultado del par de ecuaciones (43) es el mismo que el de las ecs. (33) sustituyendo n por n_{ef},

$$E_r = \left(\frac{1-n_{\text{ef}}}{1+n_{\text{ef}}}\right) E_i,$$

$$E_t = \left(\frac{2}{1+n_{\text{ef}}}\right) E_i. \tag{45}$$

Cuando se reemplaza n_{ef} por su expresión (44), es fácil verificar que se obtienen los mismos resultados que muestra la ec. (36). El punto delicado en este método es haber escrito directamente las ecuaciones de continuidad para las amplitudes sin preocuparse por lo que pasaba con las fases. Por ejemplo, la continuidad del campo eléctrico tangencial en la superficie del dieléctrico debería escribirse como

$$E_i\, e^{i(k_i x - \omega_i t)} + E_r\, e^{i(k_r x - \omega_r t)} - E_t\, e^{i(k_t x - \omega_t t)}\Big|_{x=vt} = 0. \tag{46}$$

Aquí k_i, k_r y k_t son las componentes x de los vectores $\mathbf{k}$, que son las únicas no nulas. La superficie del dieléctrico está definida por $x = vt$. Habitualmente uno evalúa la condición de continuidad sobre una interfase en reposo, donde las dependencias en t y en la posición van por caminos separados. Luego usa el argumento de que las fases deben cancelarse para obtener una solución no trivial. Repasemos ese caso entonces: para incidencia normal sobre una interfase en reposo ($x = 0$) la ecuación que debe cumplirse es

$$E_i\, e^{-i\omega_i t} + E_r\, e^{-i\omega_r t} - E_t\, e^{-i\omega_t t} = 0. \tag{47}$$

Para que haya solución no trivial debe ser $\omega_i = \omega_r = \omega_t$, y la ecuación resultante es

$$E_i + E_r = E_t. \tag{48}$$

En cambio, para la interfase en movimiento hay que evaluar la condición de continuidad sobre una superficie cuya definición depende del tiempo. Reemplazando x por vt en la ec. (46) queda

$$E_i\, e^{i(k_i v - \omega_i)t} + E_r\, e^{i(k_r v - \omega_r)t} - E_t\, e^{i(k_t v - \omega_t)t} = 0. \tag{49}$$

El resultado termina siendo el mismo: para tener soluciones no triviales las exponenciales deben cancelarse. Entonces, por un lado quedan las ecuaciones habituales

$$E_i + E_r = E_t, \tag{50}$$

y por otro ciertas condiciones de consistencia, que ya no son la igualdad de las tres frecuencias involucradas, sino estas otras

$$k_i v - \omega_i = k_r v - \omega_r = k_t v - \omega_t. \tag{51}$$

Como la onda incidente y la reflejada se propagan en el vacío, tenemos que $k_i = \omega_i/c$ y que $k_r = -\omega_r/c$, y por lo tanto la primera igualdad implica

$$\omega_r = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)\omega_i, \tag{52}$$

lo que está de acuerdo con el resultado de transformar los cuadrivectores número de onda de un sistema al otro, ec. (27). No es posible, sin embargo, obtener ω_t de una manera similar, debido a que no se conoce la relación entre k_t y ω_t. Nos limitaremos a usar los resultados que habíamos obtenido antes y a verificar que la ec. (51) vale también en el caso de la onda transmitida. A partir de las ecs. (31) y (30) resulta

$$vk_t - \omega_t = \left[\beta\left(\frac{n+\beta}{1+\beta n}\right) - 1\right]\left(\frac{1+\beta n}{1+\beta}\right)\omega_i = (\beta - 1)\,\omega_i, \tag{53}$$

y esto es igual a $k_i v - \omega_i$, que es lo que queríamos verificar.

■ **Problema 3**. Dos cargas, de valores q y $-q$, se mueven sobre el eje z, como muestra la figura. La posición de la carga q es $z(t) = a\sin\omega t$, y la de la carga $-q$ es $-z(t)$.

a) Calcular los campos de radiación $\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{R}, t)$ incluyendo los órdenes dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico. (5 pts)

b) Graficar $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ y $\mathbf{B}_{\text{rad}}$ sobre la superficie de una esfera en función del tiempo. Grafique cada orden por separado. Elija puntos representativos, indique esquemáticamente la evolución de cada campo. (2 pts)

c) Calcular la potencia media emitida por unidad de ángulo sólido. Graficar cualitativamente en función de la dirección. (2 pts)

d) Calcular la potencia media total emitida en todas direcciones. (1 pt)

■ **Solución**. Les fue bastante bien en este problema. Aprobaron 14, y de esos 14, 9 fueron más que aceptables. Era un problema muy simple, casi de aplicación de fórmulas, la mayoría de las cuales figuraban en la hoja del parcial.

a) El momento dipolar eléctrico de las dos cargas es

$$\mathbf{d}(t) = q_1\mathbf{r}_1(t) + q_2\mathbf{r}_2(t) = (2aq\sin\omega t)\,\hat{z}. \tag{54}$$

El momento dipolar magnético, definido por

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c}\Big[q_1\,\mathbf{r}_1(t)\times\mathbf{v}_1(t) + q_2\,\mathbf{r}_2(t)\times\mathbf{v}_2(t)\Big], \tag{55}$$

es cero porque las cargas se mueven radialmente,

$$\mathbf{r}_i\times\mathbf{v}_i = (a^2\omega\sin\omega t\,\cos\omega t)\,\hat{z}\times\hat{z} = 0. \tag{56}$$

El tensor $\mathbf{Q}$, y por lo tanto $\mathbf{D}$, también es cero, por paridad, ya que $q_1 = -q_2$ y $\mathbf{r}_1 = -\mathbf{r}_2$. En efecto,

$$q_1\,r_{1i}r_{1j} + q_2\,r_{2i}r_{2j} = (q_1 - q_2)\,r_{1i}r_{1j} = 0. \tag{57}$$

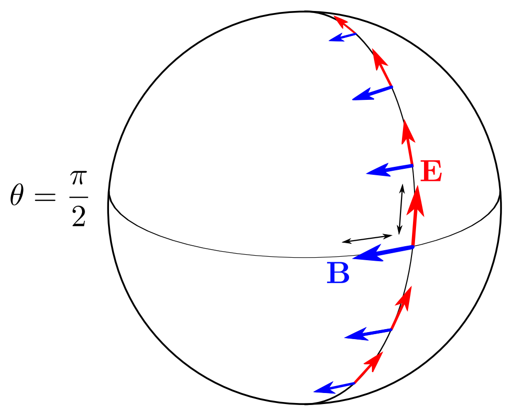
De modo que, hasta el orden pedido, únicamente hay radiación dipolar eléctrica. Los campos son

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R},t) = \frac{\hat{R}\times\Big[\hat{R}\times\ddot{\mathbf{d}}(t_R)\Big]}{c^2R} = -\frac{2\omega^2aq\sin\omega t_R}{c^2R}\,\hat{R}\times(\hat{R}\times\hat{z}) = -\frac{2\omega^2aq}{c^2R}\,\sin[\omega(t-R/c)]\,\sin\theta\,\hat{\theta},$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{R},t) = \hat{R}\times\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R},t) = -\frac{2\omega^2aq}{c^2R}\,\sin[\omega(t-R/c)]\,\sin\theta\,\hat{\varphi}. \tag{58}$$

Los campos están polarizados linealmente, oscilan con frecuencia ω y su amplitud es proporcional a $\sin\theta$. Son los campos típicos de un dipolo que oscila linealmente.

b)



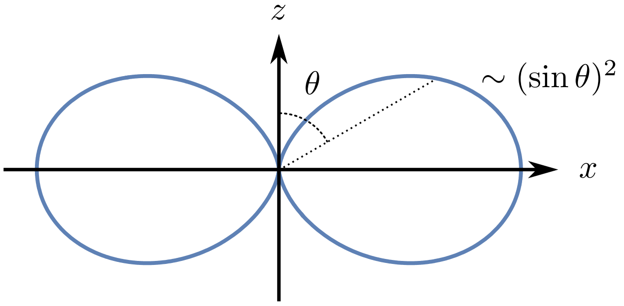
c) La intensidad en el punto $\mathbf{R}$ es

$$I(\mathbf{R},t) = \frac{c}{4\pi}R^2\,|\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{R},t)|^2 = \frac{c}{4\pi}\left\{\frac{2\omega^2aq}{c^2}\,\sin[\omega(t-R/c)]\,\sin\theta\right\}^2. \tag{59}$$

Su valor medio temporal se obtiene a partir de $\frac{1}{T}\int_{t_1}^{t_1+T}dt\,\sin^2\left(\frac{2\pi t}{T}\right) = \frac{1}{2}$. Resulta

$$\langle I(\mathbf{R},t)\rangle = \frac{c}{8\pi}\left(\frac{2\omega^2aq}{c^2}\,\sin\theta\right)^2. \tag{60}$$

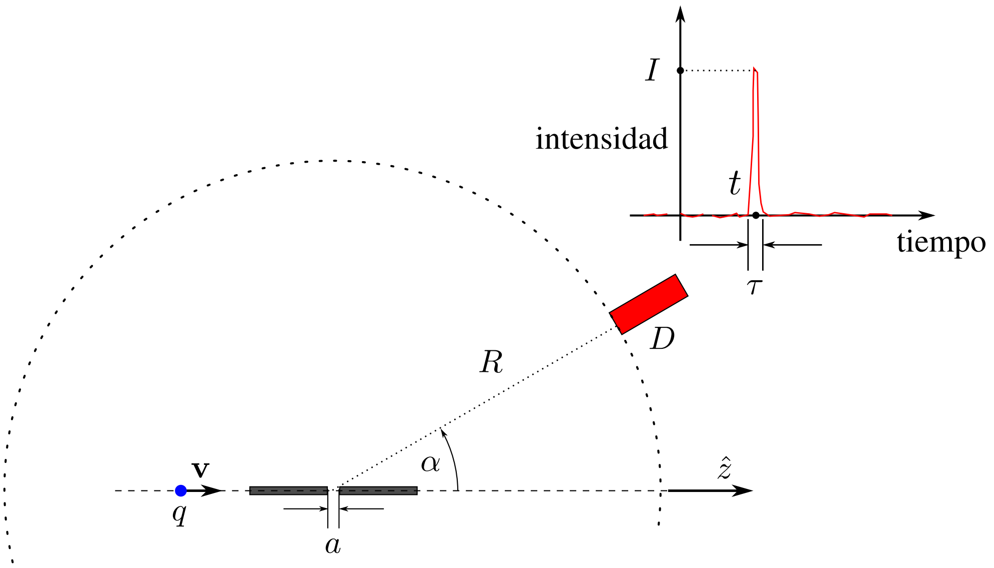
El gráfico polar de la potencia media del término dipolar eléctrico es como sigue:



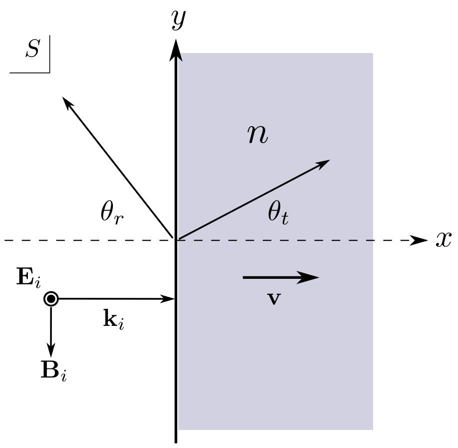
d) Integrada en todo el ángulo sólido, la potencia media total del término dipolar eléctrico da

$$P = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d\cos\theta \ \langle I(\mathbf{R}, t)\rangle = \frac{c}{3}\left(\frac{2\omega^2 aq}{c^2}\right)^2 . \tag{61}$$

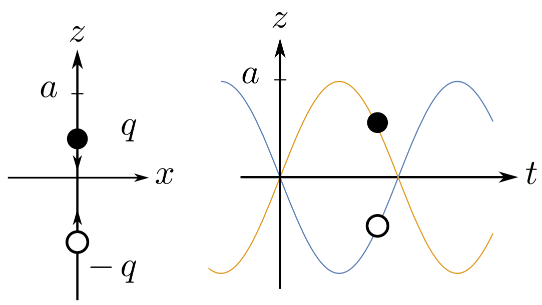
Figuras incluidas en el enunciado:



problema 1



problema 2



problema 3

Fórmulas útiles incluidas en el enunciado:

- El campo de radiación de una carga: $\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t) = \dfrac{q}{cR}\,\hat{R}\times\left[\dfrac{(\hat{R}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cdot\hat{R})^3}\right]_{t'} = \dfrac{q}{cR}\,\hat{R}\times\left[\hat{R}\times\dot{\boldsymbol{\beta}}_{\rm ap}(t)\right].$

- La relación entre los diferenciales del tiempo retardado y del tiempo de observación:

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{1-\boldsymbol{\beta}(t')\cdot\mathbf{n}(t')} = 1+\boldsymbol{\beta}_{\rm ap}(t)\cdot\mathbf{n}_{\rm ap}(t).$$

- La intensidad (potencia por unidad de ángulo sólido) del campo de radiación en un punto $\mathbf{R}$ a tiempo t:

$$I(\mathbf{R},t) = R^2\,\mathbf{S}(\mathbf{R},t)\cdot\hat{R}, \qquad \mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\,\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

- El campo de radiación hasta orden $1/c$ para un sistema acotado:

$$\mathbf{E}_{\rm rad}(\mathbf{R},t) = \frac{\hat{R}}{c^2R}\times\left[\hat{R}\times\ddot{\mathbf{d}} + \frac{1}{6c}\hat{R}\times\dddot{\mathbf{D}} + \ddot{\mathbf{m}}\right]_{t-R/c},$$

  donde

$$\mathbf{D} = \hat{R}\cdot\mathbf{Q}, \qquad \mathbf{Q} = \int d^3r\,\rho(\mathbf{r},t)\left[3\,\mathbf{r}\mathbf{r} - r^2\mathbf{I}\right].$$