

### Un comentario sobre separación de variables y división en regiones

Conviene dejar por escrito el comentario que hicimos en clase sobre cómo resolver astutamente problemas que involucran la división del espacio en varias regiones. El objetivo es hacer la menor cantidad de cuentas y tener una idea más concreta, físicamente hablando, de lo que se está resolviendo. Tomaremos como ejemplo coordenadas esféricas, pero tengan en cuenta que todo lo que digamos será igualmente válido al separar en regiones según los otros sistemas de coordenadas.

Cuando dividen el espacio en regiones entre radios  $r_1 < r_2 < \dots < r_N$ , para encontrar el potencial usando la solución de la ecuación de Laplace, en cada región propondrán soluciones del tipo

$$\Phi_n \rightarrow \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \phi) \left[ A_{lm}^{(n)} r^l + \frac{B_{lm}^{(n)}}{r^{l+1}} \right], \quad (1)$$

con dos conjuntos de coeficientes,  $A_{lm}^{(n)}$  y  $B_{lm}^{(n)}$ , en cada región. Acaso excluirán, si la primera región incluye el origen, y en el origen no hay cargas, el coeficiente  $B_{lm}^{(1)}$ ; y, análogamente, el coeficiente  $A_{lm}^{(N)}$  si la última región se extiende hasta el infinito y la condición de contorno en el infinito es que el potencial se anule. Si el problema está bien planteado, tendrán tantas condiciones auxiliares como conjuntos de incógnitas. Dicho así, todo queda reducido a resolver un sistema no muy interesante de ecuaciones lineales.

Aunque el método de escribir prolijamente el potencial y de imponer las condiciones de continuidad y salto en las fronteras es inequívoco y a prueba de errores, también es sumamente engorroso. Y en verdad os digo que será apenas tolerable cuando en los problemas aparezcan medios materiales. Aquí vamos a proponer dos alternativas. En esencia, independientemente del camino que elijan, la cuestión central es entender que hay términos del potencial que serán comunes a dos o más regiones vecinas. Ya quedará claro en los ejemplos lo que queremos decir con eso, pero, en principio, vale la pena notar que ese tipo de términos, que pasan de una región a otra sin alteración, serán automáticamente continuos y, aún más importante, sus derivadas serán continuas.

La primera alternativa que vamos a mostrar no se aleja mucho del método directo de solución. Simplemente se trata de escribir el potencial en cada región incluyendo, de manera trivial, la máxima cantidad de información, y luego obtener las condiciones de salto prestando atención a que hay términos del potencial que, de una región a la siguiente, no tienen ninguna discontinuidad. Es esa última observación la que nos va a llevar a la segunda alternativa, que minimiza de una vez y para siempre el número de coeficientes que es necesario averiguar.

■ Entonces, sin alejarnos mucho del método directo de solución, la idea es reducir poco a poco el número de coeficientes independientes en cada región. Por ejemplo, si  $r_1$  es distinto de cero y el potencial debe anularse sobre la esfera de radio  $r_1$ , desde un comienzo elegirán  $A_{lm}^{(1)}$  y  $B_{lm}^{(1)}$  de una forma en que esa condición se satisfaga automáticamente. Por ejemplo, propondrán algo del tipo

$$\Phi_1 \rightarrow A_{lm}^{(1)} \left[ r^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r^{l+1}} \right], \quad (2)$$

o alguna variante equivalente. En general, si el potencial en  $r_1$  es una función  $V_1(\theta, \varphi)$ , será

$$\Phi_1 \rightarrow A_{lm}^{(1)} \left[ r^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] + \frac{V_{lm} r_1^{l+1}}{r^{l+1}}, \quad (3)$$

donde  $V_{lm}$  es el término  $lm$  del desarrollo de  $V_1(\theta, \varphi)$  en armónicos esféricos. Si el problema involucra sólo la región entre los radios  $r_1$  y  $r_2$ , el valor del potencial sobre  $r_2$  determinará los valores de las constantes  $A_{lm}^{(1)}$ . Pero supongamos que más allá de  $r_2$  el problema sigue. Esto significa que sobre  $r_2$  el dato será cierta densidad de carga  $\sigma_2(\theta, \varphi)$ , y no el potencial.

Es importante notar que el valor del potencial en las esferas de radios  $r_1$  y  $r_N$  que limitan todo el problema puede inicialmente suponerse nulo. Una vez resuelto ese caso, restituir las condiciones de contorno reales sobre  $r_1$  y  $r_N$  se consigue sumando un par de términos de la forma

$$C_{lm} r^l + \frac{D_{lm}}{r^{l+1}}, \quad (4)$$

en toda la región entre  $r_1$  y  $r_N$ . Si  $\Phi_H$  es el potencial calculado con condiciones de contorno homogéneas sobre  $r_1$  y  $r_N$ , entonces el potencial completo será

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_H(\mathbf{r}) + \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) \left[ C_{lm} r^l + \frac{D_{lm}}{r^{l+1}} \right]. \quad (5)$$

Los coeficientes  $C_{lm}$  y  $D_{lm}$  se calcularán a partir de las condiciones de contorno en  $r_1$  y  $r_N$ . Debido a que los nuevos términos valen en todo el intervalo entre  $r_1$  y  $r_N$ , su inclusión no va a modificar las densidades de carga en el resto de las superficies de separación, ya que su derivada es continua para todos los radios intermedios. En conclusión, a los efectos de estas notas, podemos suponer que en  $r_1$  y  $r_N$  el potencial se anula y que, en particular, en la región 1 el potencial estará dado como en la ec. (2).

Yendo desde el centro hacia la periferia, la continuidad entre las regiones 1 y 2 estará asegurada si multiplican, de manera cruzada, los términos asociados a cada región evaluados sobre su frontera común; es decir, escribirán

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\rightarrow A^{(1)} \left[ r^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] \times \left[ A^{(2)} r_2^l + \frac{B^{(2)}}{r_2^{l+1}} \right], \\ \Phi_2 &\rightarrow \left[ A^{(2)} r^l + \frac{B^{(2)}}{r^{l+1}} \right] \times A^{(1)} \left[ r_2^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r_2^{l+1}} \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

(Por brevedad, se han omitido los índices  $lm$  de los coeficientes.) Equivalentemente, ya que todo el chiste está en disminuir el número de coeficientes, podemos reescribir lo anterior, sin perder nada, absorbiendo la constante  $A^{(1)}$  dentro de las otras dos:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\rightarrow \left[ r^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r^{l+1}} \right] \left[ A^{(2)} r_2^l + \frac{B^{(2)}}{r_2^{l+1}} \right], \\ \Phi_2 &\rightarrow \left[ A^{(2)} r^l + \frac{B^{(2)}}{r^{l+1}} \right] \left[ r_2^l - \frac{r_1^{2l+1}}{r_2^{l+1}} \right].\end{aligned}\tag{7}$$

La dependencia radial está dada por el primer corchete en cada región. El segundo corchete es, en cada caso, una constante. Al evaluar en  $r_2$ , los términos cruzados se igualan y obtienen lo mismo a cada lado de la frontera entre regiones.

El punto a notar es que, habiendo forzado la continuidad del potencial entre regiones, va a haber términos compartidos entre cada par de regiones vecinas. Así, en el ejemplo anterior, si distribuyen y reagrupan las expresiones que aparecen en las ecs. (7) obtienen

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\rightarrow \left[ A^{(2)} (r_2 r)^l - \frac{r_1^{2l+1} B^{(2)}}{(r_2 r)^{l+1}} \right] + \left[ B^{(2)} \frac{r^l}{r^{l+1}} - A^{(2)} r_1^{2l+1} \frac{r_2^l}{r^{l+1}} \right], \\ \Phi_2 &\rightarrow \left[ A^{(2)} (r_2 r)^l - \frac{r_1^{2l+1} B^{(2)}}{(r_2 r)^{l+1}} \right] + \left[ B^{(2)} \frac{r_2^l}{r^{l+1}} - A^{(2)} r_1^{2l+1} \frac{r^l}{r_2^{l+1}} \right].\end{aligned}\tag{8}$$

Observen ahora que en ambos casos el primer corchete es la misma función continua y derivable en las dos regiones. Por lo tanto, ese término no va a generar ningún salto en la derivada radial en  $r_2$ . Para escribir la condición de salto, sin necesidad de desarrollar los productos como hicimos para pasar de la ec. (7) a la ec. (8), pueden directamente omitir las derivadas de los términos que de antemano saben que van a ser iguales a cada lado de la frontera. Calcularán menos derivadas y no van a correr el riesgo de que al derivar, sin saberlo, dos veces la misma cosa, cometan algún error que arruine la cancelación.

La condición de salto entre las regiones 1 y 2 les permitirá eliminar  $A^{(2)}$  o  $B^{(2)}$ . Si sólo hay dos regiones y el problema termina en  $r_3$ , entonces la condición de potencial cero sobre  $r_3$  determinará todas las constantes que faltan. Ahora bien, al margen de eso, notarán que esta forma de asegurar la continuidad del potencial funciona bien si tienen únicamente dos regiones. Apenas agreguen otra región, para mantener la continuidad del potencial habrá que agregar un tercer término constante en las tres regiones, y para pasar de la región 2 a la 3 tendrán que repetir el procedimiento que llevó de la región 1 a la 2. A medida que agreguen regiones, lo que parecía una simplificación rápidamente se les volverá en contra. Es probable que en el caso de 3 regiones lo más práctico sea encomendarse al dios verdadero y resolver directamente el sistema de  $6 \times 6$ . A menos que...

■ Es aquí donde entra el tercer método de solución, que reduce drásticamente todas las cuentas. Si escriben las cosas bien, como máximo sólo tendrán que determinar dos conjuntos de coeficientes. Lo veremos con varios ejemplos. La idea general es la siguiente:

Todos los problemas de Dirichlet que estamos viendo pueden reducirse a encontrar el potencial en un dominio limitado por superficies cerradas donde el potencial es dato. Pueden ser una o dos superficies conductoras, o una superficie conductora y el infinito. Además de esas superficies habrá una distribución conocida de cargas, digamos  $\rho(\mathbf{r})$ , y acaso será dato también el campo eléctrico en el infinito. Las únicas fuentes del potencial son las cargas de la distribución  $\rho(\mathbf{r})$ , el agente que produce el campo eléctrico en el infinito y las cargas inducidas sobre los contornos. A lo sumo habrá dos de estas contribuciones provenientes de las cargas inducidas, porque a lo sumo habrá dos superficies que limiten el dominio donde se está calculando el potencial. Típicamente, dos esferas concéntricas en esféricas, o dos planos paralelos en separación en cartesianas, o dos cilindros coaxiales en cilíndricas. Noten que si hubiera una tercera superficie donde el potencial es dato, el problema podría subdividirse a su vez en otros dos, cada uno en un dominio limitado a lo sumo por dos superficies. Todo esto para decir que el potencial total debe ser la superposición de, como máximo, cuatro términos bien diferenciados:

$$\Phi = \Phi_\rho + \Phi_\infty + \Phi_{\sigma_1} + \Phi_{\sigma_2}. \quad (9)$$

El potencial  $\Phi_\rho$  es el originado por la distribución de carga conocida. Es decir,  $\Phi_\rho$  es el potencial que habría si las únicas cargas presentes fueran las de la distribución  $\rho(\mathbf{r})$ . Obviamente, encontrar  $\Phi_\rho$  puede ser un problema en sí mismo, pero es de los más simples, puesto que no hay contornos, no hay conductores, no hay nada más que  $\rho$ . Es  $\rho$  sola en el vacío. El término  $\Phi_\infty$  también es dato. Un caso típico es que  $\Phi_\infty$  esté asociado a un campo eléctrico constante en el infinito, algo de la forma  $\Phi_\infty = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{r}$ . Finalmente, las dos contribuciones  $\Phi_{\sigma_1}$  y  $\Phi_{\sigma_2}$  serán las asociadas a las cargas inducidas sobre las superficies que limitan el volumen donde están calculando el potencial. Los potenciales  $\Phi_{\sigma_1}$  y  $\Phi_{\sigma_2}$  o, si se prefiere, las densidades inducidas  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$  son, en esta forma de planteo, las verdaderas incógnitas del problema.

Si la separación es en regiones esféricas, suponiendo que el contorno interior, donde se encuentra  $\sigma_1$ , tenga radio  $a$ , y el exterior, donde se encuentra  $\sigma_2$ , tenga radio  $b$ , y dado que estamos calculando el potencial cuando  $a < r < b$ , podemos afirmar que

$$\begin{aligned} \Phi_{\sigma_1} &= \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) A_{lm} \frac{a^l}{r^{l+1}}, \\ \Phi_{\sigma_2} &= \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) B_{lm} \frac{r^l}{b^{l+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Estas expresiones corresponden a la fórmula general para el potencial producido por una distribución esférica

de cargas en superficie, fórmula que ya deben conocer:

$$\Phi_\sigma = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \phi) C_{lm} \frac{r^l}{r^{l+1}}. \quad (11)$$

Como en un caso se trata de la región interior a la esfera de radio  $b$  y, en el otro, de la región exterior a la esfera de radio  $a$ , al escribir las ecs. (10) a partir de (11), la elección de los radios mayores y menores para cada esfera es indudable. No hay otras incógnitas en el problema aparte de  $A_{lm}$  y  $B_{lm}$ , así haya cuarenta regiones en las que tendrían que dividir el dominio si quisieran resolver el problema por Laplace.

Por otro lado, escribamos  $\Phi_\rho + \Phi_\infty$  como un desarrollo en armónicos esféricos,

$$\Phi_\rho + \Phi_\infty = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) f_{lm}(r). \quad (12)$$

Las funciones  $f_{lm}(r)$  no tienen por qué ser combinaciones de  $r^l$  y  $r^{-(l+1)}$ , puesto que, en general, se tratará de soluciones de la ecuación de Poisson, no de Laplace. En definitiva, las únicas condiciones que aún no hemos fijado son los valores del potencial en las fronteras,  $V_a(\theta, \varphi)$  y  $V_b(\theta, \varphi)$ . Escribiendo

$$V_a(\theta, \varphi) = \sum_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) V_{lm}(a), \quad (13)$$

y análogamente para  $V_b$ , y comparando término a término el potencial evaluado en las fronteras, resulta

$$f_{lm}(a) + \frac{A_{lm}}{a} + B_{lm} \frac{a^l}{b^{l+1}} = V_{lm}(a),$$

$$f_{lm}(b) + A_{lm} \frac{a^l}{b^{l+1}} + \frac{B_{lm}}{b} = V_{lm}(b). \quad (14)$$

Aquí está todo. Encontrar  $A_{lm}$  y  $B_{lm}$  queda como ejercicio. El problema queda resuelto sin haber disparado ni una sola derivada.

La cuestión central, en esta forma de planteo, es entender que el efecto de los contornos es equivalente al de densidades superficiales de carga, y que esas densidades producirán contribuciones continuas y derivables dentro de todo el dominio. La densidad de carga conocida,  $\rho(\mathbf{r})$ , puede o no estar distribuida sobre superficies. En general será una distribución volumétrica. Las discontinuidades en el potencial en el interior del dominio provendrán exclusivamente de  $\rho(\mathbf{r})$  y estarán contenidas en  $\Phi_\rho$ . Y, además, como  $\Phi_\rho$  es el potencial de una distribución de carga conocida en el espacio no acotado (o con condiciones de contorno cómodamente elegidas), no debería haber dificultad en calcularlo por integración directa o usando la función de Green. En el caso especial en que  $\rho(\mathbf{r})$  incluyera varias distribuciones superficiales, ya saben que esas contribuciones será fáciles de escribir, tal como en la ec. (11). Notemos finalmente que la practicidad del método depende en buena parte del hecho de que el potencial de las superficies de contorno pueda escribirse de manera suficientemente general y sencilla. Eso es así para esferas, planos y cilindros infinitos. Habrá que ver qué pasa en otros casos.

■ Ilustraremos todo esto con un ejemplo muy simple en coordenadas esféricas. Se trata de encontrar el potencial en todo el espacio producido por una carga  $q$  frente a una esfera conductora a potencial cero. La esfera tiene radio  $a$  y la carga está sobre el semieje  $z$  positivo, a una distancia  $r'$  del origen.

Primero vamos a mostrar el método directo de solución. No requiere pensar mucho y es fácil trasladarlo a la computadora. Hecho a mano, son más cuentas. El procedimiento usual sería dividir el espacio en 3 regiones: la región I con  $a < r < r'$ , entre el conductor y la carga; la región II con  $r' < r$ , más allá de la carga; y la región interior de la esfera conductora, donde el potencial es uniforme y toma el valor cero. En las regiones I y II el potencial se escribe respectivamente como

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right], \\ \Phi_{\text{II}}(r, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{C_l}{r^{l+1}}.\end{aligned}\quad (15)$$

Hasta aquí el único trabajo hecho fue decir que en la región II no tiene que haber potencias positivas de  $r$ . Las ecuaciones que determinan los tres conjuntos de coeficientes,  $A_l$ ,  $B_l$  y  $C_l$  son: i) que el potencial se anule en  $r = a$ ; ii) que el potencial sea continuo en  $r = r'$ ; iii) que el salto en la derivada radial del potencial en  $r = r'$  sea igual a la densidad superficial de carga asociada a  $q$  sobre la esfera de radio  $r'$ . Estas ecuaciones son

$$\begin{aligned}A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} &= 0, \\ A_l r'^l + \frac{B_l}{r'^{l+1}} &= \frac{C_l}{r'^{l+1}}, \\ l A_l r'^{l-1} - \frac{l+1}{r'^{l+2}} (B_l - C_l) &= 4\pi \sigma_l.\end{aligned}\quad (16)$$

En la última ecuación,  $\sigma_l$  es el coeficiente que acompaña a  $P_l(\cos \theta)$  en el desarrollo de la densidad superficial de carga sobre la esfera de radio  $r'$ . Sabemos cómo calcular  $\sigma_l$  a partir de  $\sigma(\theta)$ :

$$\sigma(\theta) = \frac{q}{2\pi r'^2} \delta(\cos \theta - 1) \rightarrow \sigma_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) \sigma(\theta) = \frac{2l+1}{4\pi r'^2} q.\quad (17)$$

En definitiva, para cada valor de  $l$  nos quedan tres ecuaciones con tres incógnitas; nada demasiado entretenido. Lo que acabamos de hacer tiene todo el aspecto de un cálculo vacío, no mucho más estimulante que si nos dieran una lista de números y nos preguntaran cuánto suman.

La versión un poco más razonada del método anterior consiste en ir incluyendo, paso a paso, en los desarrollos del potencial en cada región, las condiciones que resultan más evidentes. Por ejemplo, en la región I, ya que

el potencial debe anularse en  $r = a$ , empezariamos por escribir que el término  $l$ -ésimo del potencial como

$$\Phi_I \rightarrow A_l \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right]. \quad (18)$$

No es la única manera de escribirlo, pero la lógica del asunto debería ser transparente: es una combinación lineal de  $r^l$  y  $r^{-(l+1)}$  elegida a propósito para que se anule en  $r = a$ . En la segunda región no hay nada análogo para decir, de modo que simplemente nos limitamos a escribir que los términos del desarrollo del potencial son de la forma

$$\Phi_{II} \rightarrow \frac{B_l}{r^{l+1}}. \quad (19)$$

Forzar la condición de continuidad en  $r'$  es algo bastante inmediato. En la región I tenemos algo de la forma  $A_l f(r)$ , y en la región II algo de la forma  $B_l g(r)$ . Para hacer esto explícitamente continuo en  $r'$  podemos agregar un factor  $g(r')$  en la región I, y un factor  $f(r')$  en la II. Respectivamente será

$$\begin{aligned} & \frac{A_l}{r'^{l+1}} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right], \\ & \frac{A_l}{r^{l+1}} \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

En rojo [son los términos que contienen a  $r'$ ] aparecen los factores constantes que agregamos en cada región para hacer continuo el potencial en  $r'$ . Ahora aparece la misma y única constante  $A_l$  en las dos regiones. Introduciendo los radios  $r_<$  y  $r_>$ , donde la comparación es respecto de  $r'$ , podemos resumir todo en una sola expresión:

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{A_l}{r_>^{l+1}} \left[ \left( \frac{r_<}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r_<} \right)^{l+1} \right]. \quad (21)$$

Falta imponer la condición de salto de la derivada radial en  $r'$ . En principio, no queda otra que derivar cada expresión, evaluar en  $r'$  y tomar la diferencia. Sin omitir nada, sería

$$\frac{A_l}{r'^{l+1}} \left[ l \frac{r'^{l-1}}{a^l} - (l+1) \frac{a^{l+1}}{r'^{l+2}} \right] + (l+1) \frac{A_l}{r'^{l+2}} \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} \right] = 4\pi\sigma_l. \quad (22)$$

Los segundos términos dentro de cada corchete **se cancelan entre sí**, y sólo queda la suma de los primeros,

$$(2l+1) \frac{A_l}{r'^2 a^l} = 4\pi\sigma_l. \quad (23)$$

Con el valor de  $\sigma_l$  a la vista, resulta

$$A_l = a^l q. \quad (24)$$

Luego,

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{P_l(\cos \theta)}{r_{>}^{l+1}} \left[ r_{<}^l - \frac{a^{2l+1}}{r_{>}^{l+1}} \right] = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{(rr')^{l+1}} \right]. \quad (25)$$

■ El objetivo de estas notas es mostrar que hay otra manera de resolver este tipo de problemas, un método en donde cada cosa tiene un significado físico concreto y evidente. Unas líneas más arriba remarcamos en negritas que al hacer la diferencia de las derivadas había dos términos que se cancelaban entre sí. Esa cancelación no fue accidental, la podríamos haber previsto y habernos ahorrado calcular un par de derivadas. Lo importante es entender por qué estas cancelaciones no son accidentales y por qué van a aparecer siempre en este tipo de problemas. Si entendemos esto vamos a encontrar un método alternativo de solución, con menos cuentas y menos posibilidades de equivocarnos.

Volviendo a las expresiones del potencial, en cada región teníamos

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{I}} &\rightarrow \frac{A_l}{r'^{l+1}} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right], \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow \frac{A_l}{r^{l+1}} \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} \right]. \end{aligned} \quad (26)$$

Si desarrollamos estas expresiones queda

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{I}} &\rightarrow \frac{A_l}{a^l} \frac{r^l}{r'^{l+1}} - A_l \left( \frac{a}{rr'} \right)^{l+1}, \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow \frac{A_l}{a^l} \frac{r'^l}{r^{l+1}} - A_l \left( \frac{a}{rr'} \right)^{l+1}. \end{aligned} \quad (27)$$

Es claro ahora que las dos regiones comparten un término que no tiene ningún salto en  $r'$ . Tanto en I y en II, los segundos términos de cada una de las expresiones anteriores son idénticos. El salto en la derivada viene exclusivamente de los primeros términos en cada expresión. En otras palabras, el término  $l$ -ésimo del potencial en cada región es de la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{I}} &\rightarrow f_l(r) + H_l(r), \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow g_l(r) + H_l(r), \end{aligned} \quad (28)$$

con la misma función  $H_l$  a cada lado de la frontera; en este caso

$$H_l(r) = -A_l \left( \frac{a}{rr'} \right)^{l+1}. \quad (29)$$

Al calcular el salto en la derivada radial, sólo importan las funciones  $f_l$  y  $g_l$ . Ahora bien, si esto no se aplica antes de calcular las derivadas, es muy probable que ni siquiera se den cuenta de que están derivando la



misma función  $H_l$  a cada lado de la superficie de discontinuidad. Y es muy probable, también, que alguna de esas veces calculen mal la derivada y se pierda la cancelación.

Esta observación nos hubiera llevado a la ecuación (23) para los  $A_l$  un poco más rápido, evitándonos calcular dos veces la derivada de una misma cosa, para luego restar los resultados, como en la ec. (22). En esas derivadas y en el cálculo de su diferencia hay excelentes oportunidades de meter la pata, y más al hacer este tipo de problemas por primera vez, porque cualquier resultado puede parecer tan bueno y natural (o todo lo contrario) como cualquier otro. Si aparece un  $l$  o un  $2l$  o un  $2l - 1$ , dividiendo o multiplicando, no tienen motivos para desconfiar del resultado, puesto que por ahora nada de esto debe decirles mucho. Sólo después de hacer varios problemas, podrán tener cierta intuición de qué tipo de expresiones esperar al final de todo.

■ Desde el comienzo venimos insistiendo con que hay una forma de resolver este tipo de problemas sin tener que hacer prácticamente ningún cálculo. La clave está en la cancelación de términos que ocurrió al hacer la diferencia de las derivadas radiales. Esta cancelación está indicando que hay una parte del potencial que no tiene saltos en  $r'$ . Si lo piensan un poco, es evidentísimo. Enumeremos para eso las fuentes del potencial. Por un lado, tienen la carga  $q$  en  $r = r'$ , y por otro lado las cargas inducidas sobre la esfera en  $r = a$ . El potencial total es la superposición de los potenciales de cada una de estas distribuciones de carga,

$$\Phi = \Phi_q + \Phi_{\text{ind}}. \quad (30)$$

Es cierto que no conocemos de antemano cuál es la distribución de carga  $\sigma_a$  inducida sobre la esfera de radio  $a$ , pero sí sabemos que  $\Phi_{\text{ind}}$  no va a tener ningún tipo de discontinuidad en  $r'$ , porque está generado por cargas que se encuentran en  $r = a$ . Todo el salto en la derivada radial en  $r'$  viene de  $q$ . Las cancelaciones que encontramos más arriba corresponden, de una manera disimulada, a la diferencia

$$\left. \frac{\partial \Phi_{\text{ind}}}{\partial r} \right|_{r'-} - \left. \frac{\partial \Phi_{\text{ind}}}{\partial r} \right|_{r'+} = 0, \quad (31)$$

que es cero porque las fuentes de  $\Phi_{\text{ind}}$  están en  $r = a$ .

La estrategia entonces es la siguiente. Conocemos una parte del potencial, que es el que produce la carga  $q$ . No conocemos  $\sigma_a$ , pero sí sabemos que es una distribución superficial sobre una esfera de radio  $a$ . La forma más general del potencial producido por una distribución superficial esférica con simetría azimutal es

$$\Phi_{\sigma}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) C_l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}, \quad (32)$$

donde se entiende que la comparación que define  $r_{<}$  y  $r_{>}$  es respecto al radio de la esfera en cuestión. Como caso particular, por ejemplo, tenemos el propio potencial de la carga puntual en  $r'$ ,

$$\Phi_q(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \quad (33)$$

Este es un resultado básico que no pueden ignorar. En el problema de la carga frente a la esfera, esa es la parte conocida del potencial. La parte desconocida es  $\Phi_{\text{ind}}$ , y se escribirá (fuera de la esfera conductora) como

$$\Phi_{\text{ind}}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) C_l \frac{a^l}{r^{l+1}}. \quad (34)$$

Notar que, debido a que nos interesa el campo en  $r > a$ , al escribir el potencial de la carga inducida hemos eliminado la alternativa entre radios mayores y menores, porque nos interesa el potencial siempre en  $r > a$ . El potencial completo sería

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_q + \Phi_{\text{ind}} = \\ &= q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) C_l \frac{a^l}{r^{l+1}}. \end{aligned} \quad (35)$$

Puesto que hemos escrito el potencial total como la suma de dos contribuciones, cada una de las cuales es de por sí el potencial de una distribución de cargas dada, automáticamente tenemos continuidad y tenemos el salto correcto de la derivada radial en  $r'$ . No vamos a tener que calcular ninguna derivada. Las incógnitas son ahora los coeficientes  $C_l$  del desarrollo del potencial debido a las cargas inducidas. La única condición que falta pedir es que el potencial sobre la esfera conductora sea cero. Término a término, eso implica que

$$q \frac{a^l}{r'^{l+1}} + \frac{C_l}{a} = 0 \rightarrow C_l = -q \frac{a^{l+1}}{r'^{l+1}}. \quad (36)$$

Finalmente,

$$\Phi(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[ \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} - \frac{a^{2l+1}}{(r r')^{l+1}} \right]. \quad (37)$$

Tómense un minuto para apreciar la economía del método. Sólo fue necesario que supiéramos el potencial de una carga en el vacío y el potencial de una cáscara esférica cargada. Lo que hubo que resolver fue mínimo. Si tuvieran una distribución  $\rho(\mathbf{r})$  más complicada que una carga puntual, deberían escribir, igual que antes,

$$\Phi = \Phi_\rho + \Phi_{\text{ind}}, \quad (38)$$

donde  $\Phi_\rho$  es el potencial asociado a la distribución  $\rho(\mathbf{r})$  y  $\Phi_{\text{ind}}$  es el producido por las cargas inducidas sobre la esfera de radio  $a$ . Ahora bien, cuando escribimos  $\Phi_\rho$  lo que queremos decir es el potencial de la distribución de carga  $\rho(\mathbf{r})$  en el todo el espacio, sin contornos, ni conductores ni nada. Siempre podrían encontrar  $\Phi_\rho$  usando la función de Green de todo el espacio desarrollada en armónicos esféricos. Pero noten precisamente eso: sería la función de Green en el vacío, en todo el espacio, sin contornos. Por otro lado, para escribir  $\Phi_{\text{ind}}$  sólo hay que saber que la expresión más general para el potencial de una distribución superficial esférica es

$$\Phi_{\text{ind}} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta, \varphi) C_l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \quad (39)$$

Esto contempla el caso en que el problema no tenga simetría azimutal. Igualmente, es inmediato generalizar el procedimiento si el potencial sobre la esfera es una función arbitraria  $V(\theta, \varphi)$ , no necesariamente nulo ni constante.

■ Resolvamos un segundo ejemplo usando el mismo método. Consideremos de nuevo una carga en el semieje  $z$  positivo, a una distancia  $r'$  del origen, encerrada entre dos esferas concéntricas de radios  $a$  y  $b$  puestas a potencial cero. Es decir,  $a < r' < b$ . El potencial es ahora la suma de tres contribuciones: la carga  $q$  en  $r'$  y las dos distribuciones superficiales de carga sobre las esferas conductoras. Cada una de estas contribuciones tendrá la forma genérica del potencial de una distribución de carga superficial sobre una esfera,

$$\Phi_\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) C_l \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}}. \quad (40)$$

La región que nos interesa es  $a \leq r \leq b$ . Esta región es exterior a la primera esfera e interior a la segunda, de modo que la elección entre  $r_{<}$  y  $r_{>}$  en cada caso es siempre la misma. El potencial total va a ser

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_q + \Phi_a + \Phi_b \\ &= q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r_{<}^l}{r_{>}^{l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) A_l \frac{a^l}{r^{l+1}} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) B_l \frac{r^l}{b^{l+1}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Las incógnitas son  $A_l$  y  $B_l$ , los coeficientes de los potenciales de las distribuciones inducidas sobre cada esfera. La única información que falta usar es que el potencial es cero en  $a$  y  $b$ . Eso implica

$$\begin{aligned} q \frac{a^l}{r'^{l+1}} + \frac{A_l}{a} + \frac{B_l a^l}{b^{l+1}} &= 0 \\ q \frac{r'^l}{b^{l+1}} + \frac{A_l a^l}{b^{l+1}} + \frac{B_l}{b} &= 0. \end{aligned} \quad (42)$$

Despejar de aquí  $A_l$  y  $B_l$  es fácil; después lo que da un poco de trabajo es dejar escrito el potencial de manera compacta.

■ A modo de comparación, si hubiéramos separado en regiones  $r < r'$  y  $r' < r$ , habríamos empezado por escribir en cada región términos de la forma

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{I}} &\rightarrow A_l \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right], \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow B_l \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^l - \left( \frac{b}{r} \right)^{l+1} \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Aquí ya está resuelto lo más sencillo, a saber, anular el potencial en las esferas conductoras. Para forzar la continuidad en  $r'$  escribimos en cada región

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}} &\rightarrow A_l \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] \left[ \left( \frac{r'}{b} \right)^l - \left( \frac{b}{r'} \right)^{l+1} \right], \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow A_l \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^l - \left( \frac{b}{r} \right)^{l+1} \right] \left[ \left( \frac{r'}{a} \right)^l - \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} \right].\end{aligned}\quad (44)$$

Lo único que resta averiguar es  $A_l$ . Falta para eso pedir la condición de salto de la derivada radial. Si no supiéramos nada, derivaríamos las expresiones completas del potencial a cada lado de  $r'$  y luego calcularíamos la diferencia. Si al problema lo resuelven en la computadora, no pasa nada. Si lo hacen a mano, es muy probable que cometan algún error. Pero con lo que comentamos hasta ahora estamos en condiciones de evitar calcular las derivadas de los términos del potencial que no tienen saltos entre una región y la otra. No es tan difícil identificar cuáles son los términos que aparecen repetidos en las expresiones del potencial en cada región. Son aquellos en que  $r$  y  $r'$  están de manera simétrica. Tanto en  $\Phi_{\text{I}}$  como en  $\Phi_{\text{II}}$  aparece la combinación

$$\left( \frac{rr'}{ab} \right)^l + \left( \frac{ab}{rr'} \right)^{l+1}.\quad (45)$$

Así, para calcular el salto en la derivada radial alcanza con derivar y tomar la diferencia de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned}\Phi_{\text{I}} &\rightarrow -A_l \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^l \left( \frac{b}{r'} \right)^{l+1} + \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \left( \frac{r'}{b} \right)^l \right] + \dots, \\ \Phi_{\text{II}} &\rightarrow -A_l \left[ \left( \frac{r}{b} \right)^l \left( \frac{a}{r'} \right)^{l+1} + \left( \frac{r'}{a} \right)^l \left( \frac{b}{r} \right)^{l+1} \right] + \dots\end{aligned}\quad (46)$$

Los puntos suspensivos indican los términos comunes a ambos potenciales y que ahora no importan. Explícitamente, la condición que se obtiene es

$$A_l \frac{2l+1}{r'^2} \left( \frac{a^{l+1}}{b^l} - \frac{b^{l+1}}{a^l} \right) = \frac{2l+1}{r'^2} q.\quad (47)$$

Con esto ya está resuelto el problema. Son más cuentas, no está a la vista qué significa físicamente cada cosa, aunque al final quizá es más sencillo llegar a una expresión compacta para el potencial. No sé si esa ventaja compensa las dificultades. En todo caso, este método de ir escribiendo los potenciales paso a paso, incluyendo de a una por vez las condiciones de contorno y continuidad, resulta práctico y poco arriesgado siempre y cuando tengan a la vista qué partes, en las expresiones de los potenciales, no tienen saltos en las superficies que dividen las regiones. Con eso en mente, si sólo hay que separar el problema en dos regiones, no hay tanta diferencia entre resolver el problema así y en resolverlo descomponiendo el potencial en la

suma de varias contribuciones, originadas en las distribuciones de carga conocidas, por un lado, y en las distribuciones superficiales inducidas sobre los contornos, por otro lado. Si hubiera que dividir en más de dos regiones, el método de descomponer el potencial según las cargas que son dato y las cargas inducidas presenta una clara ventaja. Noten, además, que la separación en regiones sólo es posible si todas las cargas están distribuidas sobre esferas. No hay una limitación análoga si descomponen el potencial como ya hemos dicho.

■ Para cerrar este problema, vamos a retroceder un paso más y a escribir las ecuaciones que resultan si no pudiéramos nada de nuestra parte y dejásemos que las ecuaciones se escribiesen solas. En la región I, entre  $r = a$  y  $r = r'$ , el término  $l$ -ésimo del potencial sería

$$\Phi_{\text{I}} \rightarrow A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}, \quad (48)$$

y en la región II, entre  $r = r'$  y  $r = b$ ,

$$\Phi_{\text{II}} \rightarrow C_l r^l + \frac{D_l}{r^{l+1}}. \quad (49)$$

Las cuatro ecuaciones que necesitamos son

$$A_l a^l + \frac{B_l}{a^{l+1}} = 0,$$

$$C_l b^l + \frac{D_l}{b^{l+1}} = 0,$$

$$A_l r'^l + \frac{B_l}{r'^{l+1}} = C_l r'^l + \frac{D_l}{r'^{l+1}},$$

$$l(A_l - C_l)r'^{l-1} - (l+1)(B_l - D_l)r'^{-(l+2)} = \frac{2l+1}{r'^2} q. \quad (50)$$

Son tantas ecuaciones como incógnitas; no pasa nada si resuelven las ecuaciones con lápiz y papel, pero nadie lo hará por placer. Hay algo, sin embargo, que puede decirse a favor de este método tan directo y poco meditado de resolver el problema. Un procedimiento así resulta práctico si hacen las cuentas en la computadora. Lo único que tienen que pensar es cómo escriben el potencial en cada región, el resto lo resuelve el programa que estén usando. Debido a que son ecuaciones tan sencillas, no hay mayor provecho en simplificar las cosas si después las va a resolver el programa, teniendo en cuenta que las simplificaciones son mínimas en términos computacionales.