

Física Teórica 1 – 1^{er} cuatrimestre de 2009
2^{do} parcial – enunciados y soluciones

Problema 1:

Un espejo plano está compuesto por una capa dieléctrica de espesor d depositada sobre la superficie de un conductor perfecto [fig. 1 (a)]. El dieléctrico tiene permitividad ϵ y permeabilidad μ , reales ambas. (Las cantidades d , ϵ y μ están referidas al sistema propio del espejo y se mantienen invariantes.)

Inicialmente el espejo se mueve respecto al sistema de laboratorio con velocidad $\mathbf{v} = -v\hat{x}$, perpendicular a su superficie, acercándose a una fuente de ondas planas con la cara dieléctrica orientada hacia la fuente [fig. 1 (b)]. En el sistema de laboratorio las ondas tienen frecuencia ω , intensidad media I y se propagan según \hat{x} .

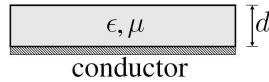


fig. 1 (a)

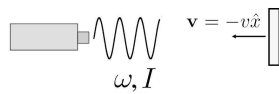


fig. 1 (b)

- (a) Demuestre que en el sistema propio del espejo la ecuación de Fresnel que relaciona los campos eléctricos de las ondas incidente y reflejada tiene la siguiente forma

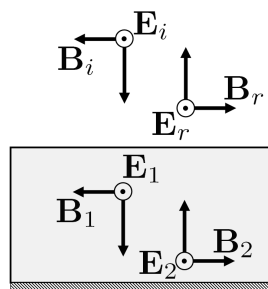
$$\mathbf{E}_{\text{ref}} = -\frac{s \cos \alpha + i \sin \alpha}{s \cos \alpha - i \sin \alpha} \mathbf{E}_{\text{in}} \quad (\text{sistema propio del espejo, } s \text{ y } \alpha \text{ reales),}$$

y escriba s y α en términos de los datos del problema.

- (b) ¿Cómo debe hacerse depender I de la velocidad v para conseguir que en el sistema propio del espejo la intensidad de la onda incidente sea siempre igual a una constante I_0 independiente de la velocidad v ?
- (c) Suponiendo que I es la función $I(v)$ hallada en el ítem anterior, encuentre la condición sobre v que determina máximos en el valor medio del cuadrado del campo eléctrico sobre la superficie del dieléctrico, $\langle |\mathbf{E}_D|^2 \rangle$, medido en el sistema propio del espejo.

Solución:

- (a) Mostraremos dos métodos para encontrar el campo reflejado: uno directo, planteando las condiciones de contorno en las dos interfases; y un segundo método usando reflexiones múltiples.



Primer método: La figura anterior muestra los campos en el sistema donde el espejo está en reposo. Como las ondas se propagan en el laboratorio en la misma dirección que \mathbf{v} , la incidencia es normal tanto en el sistema de laboratorio como en el que se mueve con el espejo (las componentes transversales de \mathbf{k} no cambian al pasar de un sistema al otro, y como son cero en el sistema de laboratorio son cero también en el del espejo). Las condiciones de contorno en la interfase dieléctrico-vacío que no se satisfacen trivialmente son

$$E_i + E_r = E_1 + E_2 \quad (\text{conservación } \mathbf{E} \text{ tangencial),} \quad (1)$$

$$E_i - E_r = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}}(E_1 - E_2) \quad (\text{conservación } \mathbf{H} \text{ tangencial),} \quad (2)$$

y en la interfase dieléctrico-conductor

$$E_1 e^{ik'd} + E_2 e^{-ik'd} = 0 \quad (\text{conservación } \mathbf{E} \text{ tangencial}), \quad (3)$$

donde $k' = \frac{\omega' n}{c}$, siendo $n = \sqrt{\epsilon\mu}$ el índice de refracción y ω' la frecuencia medida en el sistema en reposo del espejo, relacionada con ω del laboratorio por una transformación de Lorentz

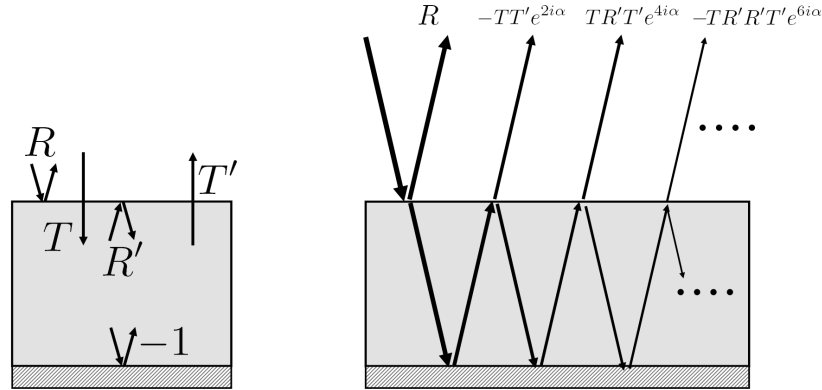
$$\omega' = \gamma\omega(1 + \beta) = \omega \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \frac{v}{c}. \quad (4)$$

Las fases en la ecuación (3) corresponden a haber tomado el origen sobre la interfase dieléctrico-vacío; ésta es la elección más práctica, porque en la interfase dieléctrico-conductor sólo intervienen 2 campos, contra 4 que hay en la otra. Notemos que las ecuaciones de conservación para las componentes perpendiculares de \mathbf{D} y \mathbf{B} se cumplen trivialmente, ya que los campos son paralelos a las interfases. Además la ecuación de conservación de \mathbf{H} tangencial en la interfase dieléctrico-conductor no da información sobre los campos, sino sobre la densidad de corriente superficial en el conductor. Las ecuaciones para los campos resultan prácticamente un sistema de 2×2 . El campo reflejado está dado por

$$E_r = -E_i \left[\frac{s \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha}{s \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha} \right], \quad (5)$$

donde $s = \sqrt{\epsilon/\mu}$ y $\alpha = k'd$. Esta ecuación relaciona las amplitudes de los campos sobre la interfase dieléctrico-vacío y es independiente de donde hayan puesto el origen de coordenadas. Puede notarse, también, que en el sistema del espejo el campo de la onda reflejada tiene el mismo módulo que el de la incidente, un resultado que debería esperarse por el hecho de que el conductor es perfecto y el dieléctrico no tiene pérdidas.

Segundo método: reflexiones múltiples. En la primera parte de la figura siguiente se indican los coeficientes de reflexión y transmisión para cada interfase, en uno y otro sentido:



La segunda parte de la figura muestra los campos que vuelven hacia el vacío (salvo un factor E_i , común a todos ellos). Para la polarización TE, que es con la que estamos trabajando, estos coeficientes vienen dados por las fórmulas de Fresnel correspondientes, que pueden escribirse como

$$\begin{aligned} R &= -R' = \frac{1 - s}{1 + s}, \\ T &= 1 + R, \\ T' &= 1 - R, \end{aligned} \quad (6)$$

donde $s = n/\mu = \sqrt{\epsilon/\mu}$. Para cada recorrido de ida y vuelta desde la interfase dieléctrico-vacío al conductor hay un corrimiento de fase igual a $2\alpha = 2k'd$, y en la reflexión dieléctrico conductor hay un cambio de fase igual a π , que es equivalente a un coeficiente de reflexión igual a -1 . Sumando todos los campos que vuelven hacia el vacío, queda

$$\frac{E_r}{E_i} = R - TT'e^{2i\alpha} + TR'T'e^{4i\alpha} - TR'R'T'e^{6i\alpha} + \dots = \left[R - TT'e^{2i\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} (-R'e^{2i\alpha})^m \right]. \quad (7)$$

La última suma se puede hacer; usando la relación entre T , T' y R , queda

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{R - e^{2i\alpha}}{1 - Re^{2i\alpha}}. \quad (8)$$

De aquí se llega fácilmente a la ec. (5).

(b) La intensidad media de la onda incidente en el sistema de laboratorio está dada por

$$I = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_i^L|^2, \quad (9)$$

donde \mathbf{E}_i^L es la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente en el sistema de laboratorio. La intensidad de esta misma onda en el sistema propio del espejo es

$$I_0 = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_i|^2, \quad (10)$$

donde \mathbf{E}_i es la amplitud del campo eléctrico de la onda incidente en ese sistema. Para relacionar I con I_0 , lo que hay que hacer es ver cuál es la relación entre los campos eléctricos \mathbf{E}_i^L y \mathbf{E}_i . Esa relación sale de la ley de transformación. Teniendo en cuenta que el campo magnético de la onda plana es perpendicular al campo eléctrico y que tiene el mismo módulo, y considerando con cuidado cuáles son las orientaciones de \mathbf{v} y del vector de onda $(\omega/c)\hat{k}_i$ de la onda incidente, queda

$$\mathbf{E}_i = \gamma (\mathbf{E}_i^L + \vec{\beta} \times \mathbf{B}_i^L) = \gamma (\mathbf{E}_i^L + \vec{\beta} \times [\hat{k}_i \times \mathbf{E}_i^L]) = \gamma(1 + \beta)\mathbf{E}_i^L. \quad (11)$$

Esto da la siguiente relación entre las intensidades

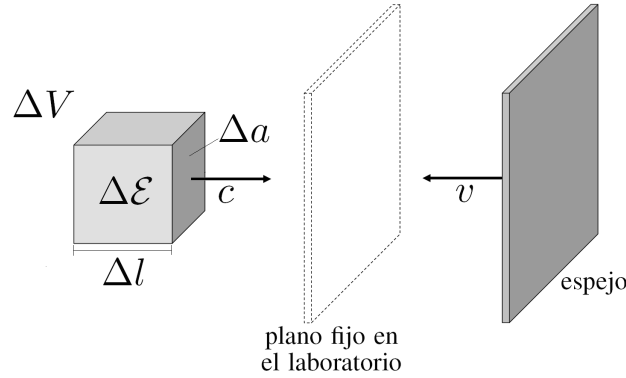
$$I_0 = \gamma^2(1 + \beta)^2 I = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} I. \quad (12)$$

Si se quiere que I_0 no dependa de la velocidad, debe ser

$$I(\beta) = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} I_0. \quad (13)$$

Lógicamente a mayor velocidad menor tiene que ser la intensidad.

Un camino alternativo para calcular cómo transforma la intensidad de la onda incidente es considerar la energía contenida en un pequeño volumen ΔV , que se mueve con la onda, y analizar su paso a través de planos fijos en el sistema de laboratorio o fijos en el sistema del espejo. (Aquí ΔV es un nombre, común a todos los sistemas, no necesariamente el valor numérico del volumen.) Supongamos que la energía contenida en ΔV en el sistema de laboratorio sea $\Delta\mathcal{E}$, y que el volumen ΔV tenga un área transversal Δa y una longitud Δl .



Esta energía tarda un tiempo $\Delta t = \Delta l/c$ en atravesar un plano fijo en el laboratorio, orientado perpendicular a la dirección en que viaja la luz. La intensidad en el sistema de laboratorio es entonces, por definición,

$$I = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta a \Delta t}. \quad (14)$$

En el sistema fijo al espejo la energía contenida en el volumen ΔV está dada por

$$\Delta\mathcal{E}' = \gamma(\Delta\mathcal{E} + v\Delta\mathcal{P}) = \gamma(1 + \beta)\Delta\mathcal{E}, \quad (15)$$

donde $\Delta\mathcal{P} = \Delta\mathcal{E}/c$ es el impulso lineal en la dirección de propagación asociado a $\Delta\mathcal{E}$. Ahora bien, vista desde el sistema de laboratorio, esa energía tarda un tiempo $\Delta t_0 = \Delta l/(c + v) = \Delta t/(1 + \beta)$ en atravesar un plano fijo en el sistema propio del espejo. A ese tiempo corresponde en el sistema del espejo un intervalo propio $\Delta t' = \Delta t_0/\gamma = \Delta t/[\gamma(1 + \beta)]$. Entonces, como el área transversal no se modifica, la intensidad medida en el sistema del espejo queda dada por

$$I_0 = \frac{\Delta\mathcal{E}'}{\Delta t' \Delta a} = \frac{\Delta\mathcal{E}}{\Delta t \Delta a} \gamma^2(1 + \beta)^2 = \frac{1 + \beta}{1 - \beta} I, \quad (16)$$

que es el resultado obtenido antes.

- (c) El campo eléctrico E_D sobre la superficie del dieléctrico es la suma $E_i + E_r$, igual también a $E_1 + E_2$ (por eso no hacía falta aclarar de qué lado de la interfase se pedía); uno encuentra

$$E_D = \frac{2E_i}{1 + i s \cot \alpha}. \quad (17)$$

El valor medio de este campo al cuadrado es 1/2 de su módulo al cuadrado

$$\langle |E_D|^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{4E_i^2}{1 + s^2(\cot \alpha)^2} = \frac{16\pi I_0/c}{1 + s^2(\cot \alpha)^2}. \quad (18)$$

Se quieren los máximos de esta expresión como función de la velocidad. Como por definición I_0 se mantiene constante, la única dependencia en la velocidad aparece a través de $\alpha = k'd = \sqrt{(1+\beta)/(1-\beta)} (\omega n d/c)$. Los máximos se encuentran cuando $\cot \alpha = 0$, es decir cuando $\alpha = (2m+1)\pi/2$, con $m = 0, 1, 2, \dots$ [por definición α es positivo, por eso se excluyen los enteros negativos]. En términos de los datos del problema, la condición de máximo es

$$k'd = (2m+1)\frac{\pi}{2} \implies \quad (19)$$

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \frac{\omega n}{c} d = (2m+1)\frac{\pi}{2} \implies \quad (20)$$

$$\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} = \frac{(2m+1)}{4} \frac{\lambda/n}{d}, \quad (21)$$

donde $\lambda = \omega/c$, es la longitud de onda en el sistema de laboratorio. Definiendo $a_m = \frac{(2m+1)}{4} \frac{\lambda/n}{d}$, se despejan las velocidades que dan máximos

$$\beta_m = \frac{a_m^2 - 1}{a_m^2 + 1}. \quad (22)$$

Como el espejo se acerca a la fuente, los valores permitidos de m son aquellos tales que $a_m \geq 1$, o sea mayores que cierto m_{\min} , que es el menor entero tal que $\frac{(2m+1)}{4} \frac{\lambda/n}{d} \geq 1$ (físicamente, ¿cuál es la razón?). Se ve también que, satisfecho esto, es $0 \leq \beta_m < 1$.

Notar que, alternativamente, la condición de máximo puede encontrarse pidiendo que el desfase ϕ asociado al recorrido de ida y vuelta entre la superficie del dieléctrico y la del conductor sea $2N\pi$ ($N = 1, 2, \dots$), de manera de tener interferencia constructiva entre sucesivas reflexiones. En efecto, teniendo en cuenta que la reflexión en el conductor introduce un corrimiento en π , resulta $\phi = 2k'd + \pi$. Luego, pedir $\phi = 2N\pi$, implica la misma condición que la ec. (19).

Problema 2:

Dos dipolos puntuales, uno eléctrico \mathbf{p} y otro magnético \mathbf{m} , perpendiculares entre sí, se encuentran en el origen y rotan con velocidad angular ω [fig. 2]. El eje de rotación pasa por el origen y es perpendicular al plano que definen los dos dipolos.

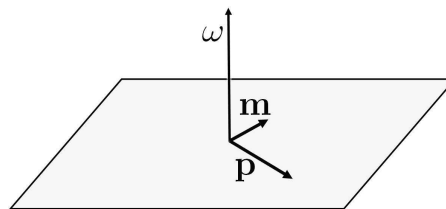


fig. 2

- Encuentre los campos de radiación.
- Encuentre la energía emitida por unidad de tiempo.
- Encuentre la fuerza media que actúa sobre el sistema de los dos dipolos como resultado de la emisión de radiación electromagnética. ¿En qué sentido tienden a acelerarse?

Solución:

- (a) Había al menos dos formas de encarar el problema: usando cantidades reales para representar directamente las fuentes y campos físicos, o usando notación exponencial. La diferencia entre ambos métodos es mínima, pero el primero es posiblemente el más práctico.

Primer método: Tomando la condición inicial de los dipolos como $\mathbf{p}(0) = p \hat{x}$ y $\mathbf{m}(0) = m \hat{y}$, y definiendo dos versores rotantes

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(t) &= \cos \omega t \hat{x} + \text{sen} \omega t \hat{y}, \\ \hat{\varphi}(t) &= -\text{sen} \omega t \hat{x} + \cos \omega t \hat{y},\end{aligned}\quad (23)$$

para todo tiempo quedan $\mathbf{p}(t) = p \hat{\rho}(t)$ y $\mathbf{m}(t) = m \hat{\varphi}(t)$. Los campos de radiación son la suma de los campos de radiación de cada dipolo:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2 r} [\hat{n} \times (\hat{n} \times \ddot{\mathbf{p}}) + \hat{n} \times \ddot{\mathbf{m}}]_{t'}, \quad (24)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \hat{n} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t), \quad (25)$$

donde $\hat{n} = \mathbf{r}/r$. En el miembro de la derecha $\ddot{\mathbf{p}}$ y $\ddot{\mathbf{m}}$ están evaluados en el tiempo retardado $t' = t - r/c$. Entonces queda

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = -\frac{\omega^2}{c^2 r} [p \hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{\rho}) + m \hat{n} \times \hat{\varphi}]_{t'}. \quad (26)$$

Aquí se usó que $\ddot{\hat{\rho}} = -\omega^2 \hat{\rho}$, y similarmente para $\hat{\varphi}$.

- (b) Para obtener la potencia emitida hay que calcular el vector de Poynting de los campos de radiación. La cantidad que importa es

$$r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{n} = \frac{c}{4\pi} r^2 |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2. \quad (27)$$

Calculando el módulo del campo eléctrico a partir de la ec. (26), queda

$$r^2 E_{\text{rad}}^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left\{ p^2 [1 - (\hat{n} \cdot \hat{\rho})^2] + m^2 [1 - (\hat{n} \cdot \hat{\varphi})^2] + 2mp (\hat{n} \cdot \hat{z}) \right\}, \quad (28)$$

donde $(\hat{n} \cdot \hat{z})$ aparece a partir de $[-(\hat{n} \times \hat{\varphi}) \cdot \hat{\rho}] = (\hat{\rho} \times \hat{\varphi}) \cdot \hat{n}$. Para calcular la energía total emitida por unidad de tiempo hay que integrar en todo el ángulo sólido

$$P = \int d\Omega r^2 \mathbf{S} \cdot \hat{n}. \quad (29)$$

A la integral sólo contribuyen los términos que tienen un número par de factores \hat{n} ; el término cruzado, proporcional a mp , al tener un solo factor \hat{n} , integrado da cero. Para hacer las integrales, lo más práctico es no escribir explícitamente las componentes de los versores, sino usar que

$$\int d\Omega \hat{n}_i \hat{n}_j = \frac{4\pi}{3} \delta_{ij}, \quad (30)$$

donde \hat{n}_i es la componente i -ésima del versor \hat{n} en coordenadas cartesianas. Así, por ejemplo,

$$\int d\Omega [1 - (\hat{n} \cdot \hat{\rho})^2] = \int d\Omega [1 - \hat{n}_i \hat{n}_j \hat{\rho}_i \hat{\rho}_j] = 4\pi \left(1 - \frac{\delta_{ij}}{3} \hat{\rho}_i \hat{\rho}_j\right) = \frac{8\pi}{3}. \quad (31)$$

La potencia total termina siendo igual a la suma de la potencia de cada dipolo por separado:

$$P = \frac{2ck^4}{3} (p^2 + m^2), \quad (32)$$

donde $k = \omega/c$. [Éste es un resultado general: la potencia de un sistema que tiene momento dipolar eléctrico, dipolar magnético y cuadrupolar eléctrico es la suma de las potencias correspondientes a cada momento por separado.] Vemos que P es independiente del tiempo, como debe ser, debido a que la elección del origen del tiempo es equivalente a una rotación del sistema de los dipolos, y esa rotación es irrelevante en la integral de una cantidad escalar en todo el ángulo sólido.

- (c) Para calcular la fuerza media sobre los dipolos hay que partir de la conservación del impulso total

$$\frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} + \frac{d\mathbf{P}_{\text{EM}}}{dt} = \oint_S da \mathbf{T} \cdot \hat{n}, \quad (33)$$

donde

$$\mathbf{P}_{\text{EM}} = \int_V d^3r \frac{1}{4\pi c} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (34)$$

y el volumen de integración está limitado por una esfera cuyo radio R eventualmente se hace tender a infinito. La interpretación de la ecuación (33) es la siguiente: si el vínculo que mantiene a los dipolos en el origen desapareciera, la aceleración inicial con la que empezarían a moverse vendría determinada por una fuerza igual a $d\mathbf{P}_{\text{mec}}/dt$.

En el cálculo de \mathbf{P}_{EM} , como la integral incluye puntos cercanos al origen, los campos que habría que usar son los completos, suma de los de radiación y de los cercanos. Sin embargo no hace falta hacer este cálculo, ya que, al tomar el valor medio,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} \right\rangle + \left\langle \frac{d\mathbf{P}_{\text{EM}}}{dt} \right\rangle = \left\langle \oint_S da \mathbf{T} \cdot \hat{n} \right\rangle, \quad (35)$$

$\langle d\mathbf{P}_{\text{EM}}/dt \rangle$ se anula. Esto se puede justificar del siguiente modo: debido a la simetría del problema, el impulso neto contenido en los campos electromagnéticos tiene que ser un vector que rota alrededor de z con frecuencia ω , es decir $\mathbf{P}_{\text{EM}}(t) = p_\rho \hat{\rho}(t) + p_\varphi \hat{\varphi}(t) + p_z \hat{z}$; por lo tanto la derivada de su componente z es cero y los promedios de las derivadas de sus componentes x e y son nulos, puesto que $\langle \dot{\hat{\rho}}(t) \rangle = \langle \dot{\hat{\varphi}}(t) \rangle = 0$.

En definitiva,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} \right\rangle = \left\langle \oint_S da \mathbf{T} \cdot \hat{n} \right\rangle. \quad (36)$$

En la última integral los únicos campos que importan en el cálculo de \mathbf{T} son los de radiación. Campos que vayan a cero más rápido que $1/r$ dan contribuciones que tienden a cero cuando $R \rightarrow \infty$. Así queda

$$\mathbf{T} \cdot \hat{n} = \frac{1}{4\pi} \left[(\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \hat{n}) \mathbf{E}_{\text{rad}} + (\mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \hat{n}) \mathbf{B}_{\text{rad}} - \frac{1}{2} (E_{\text{rad}}^2 + B_{\text{rad}}^2) \hat{n} \right], \quad (37)$$

pero los campos de radiación son perpendiculares a \hat{n} , y además $E_{\text{rad}} = B_{\text{rad}}$, así que

$$\mathbf{T} \cdot \hat{n} = -\frac{1}{4\pi} E_{\text{rad}}^2 \hat{n} = -\frac{1}{c} \mathbf{S}. \quad (38)$$

Este resultado es razonable, ya que la radiación lleva una energía igual a c veces su impulso lineal. Calcular el impulso medio emitido es muy parecido entonces al cálculo de la energía emitida, sólo que en lugar de aparecer la integral de $\mathbf{S} \cdot \hat{n}$, aparece directamente la integral de \mathbf{S} . El factor \hat{n} de menos hace ahora que los únicos términos de E_{rad}^2 [ec. (28)] que contribuyen a la integral del impulso emitido sean los que no contribuyeron antes a la integral de la potencia, esto es

$$\oint_S da \mathbf{T} \cdot \hat{n} = \int d\Omega r^2 \left[-\frac{1}{4\pi} E_{\text{rad}}^2 \hat{n} \right] = -\frac{1}{4\pi} k^4 2mp \int d\Omega (\hat{n} \cdot \hat{z}) \hat{n}. \quad (39)$$

La última integral sale usando de nuevo la ec. (30), y es igual a $(4\pi/3)\hat{z}$. Luego

$$\oint_S da \mathbf{T} \cdot \hat{n} = -\frac{2}{3} k^4 mp \hat{z}, \quad (40)$$

y es, como la potencia, independiente del tiempo, y por lo tanto coincide con su valor medio. Finalmente

$$\left\langle \frac{d\mathbf{P}_{\text{mec}}}{dt} \right\rangle = -\frac{2}{3} k^4 mp \hat{z}. \quad (41)$$

El signo menos indica que los dipolos tienden a acelerarse en la dirección de z negativa (asumiendo, claro, que $mp > 0$). Tener sólo un dipolo eléctrico rotando o uno magnético no produce emisión de impulso.

Segundo método: El segundo método para resolver el problema consistía en representar las fuentes usando notación compleja. Así, el dipolo eléctrico $\mathbf{p}(t)$ podía representarse mediante la parte real de un vector complejo

$$\mathbf{p}(t) = \text{Re} [(\hat{x} - i\hat{y}) e^{i\omega t}], \quad (42)$$

y el dipolo magnético como

$$\mathbf{m}(t) = m \text{Re} [i(\hat{x} - i\hat{y}) e^{i\omega t}]. \quad (43)$$

Salvo un factor ω , notar que $i(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\omega t}$ es la derivada de $(\hat{x} - i\hat{y})e^{i\omega t}$, lo que está de acuerdo con que $\dot{\hat{\rho}} = \omega\hat{\rho}$ [ver. ec. (23)]. Definiendo $\hat{s} = \hat{x} - i\hat{y}$, uno puede escribir

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} [p\hat{n} \times (\hat{n} \times \hat{s}) + i m (\hat{n} \times \hat{s})] e^{-ikr}, \quad (44)$$

con la convención de que el campo físico se obtiene al tomar la parte real de $\mathbf{E}_{\text{rad}} \exp[i\omega t]$. Señalemos que los dos exponentes, $-kr$ y ωt , combinados dan $\omega t'$, donde t' es el tiempo retardado $t - r/c$.

Como se mostró antes, los flujos de energía y de impulso están dados por el vector de Poynting. Al trabajar con notación compleja las cantidades que son fáciles de determinar son los valores medios. Si los campos físicos son $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{B}(\mathbf{r})e^{i\omega t}]$, uno define el vector de Poynting complejo

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*, \quad (45)$$

donde en el segundo miembro aparecen los campos complejos $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. La parte real de \mathbf{S} es igual al flujo medio de energía. Para los campos de radiación $\mathbf{B} = \hat{n} \times \mathbf{E}$, y además $\hat{n} \cdot \mathbf{E} = 0$; de ahí resulta que \mathbf{S} es real y toma la forma

$$\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 \hat{n}. \quad (46)$$

La ecuación que corresponde en esta notación a la ec. (28) del método anterior es

$$r^2 |\mathbf{E}_{\text{rad}}|^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \left\{ (p^2 + m^2) [2 - (\hat{n} \cdot \hat{s})(\hat{n} \cdot \hat{s}^*)] + 4mp (\hat{n} \cdot \hat{z}) \right\}, \quad (47)$$

donde se ha usado que $\hat{s} \cdot \hat{s}^* = 2$ y que $-i\hat{s} \times \hat{s}^* = 2\hat{z}$. A partir de aquí, con la ayuda de la ec. (30), no es difícil llegar a los resultados obtenidos con el primer método.

Un último comentario: el ítem (b) pedía la potencia, no la potencia media, que es a lo que uno llega usando notación compleja. Sin embargo, vimos antes, mediante un sencillo argumento, que la potencia en este problema es independiente del tiempo: calcular la potencia en un tiempo o en otro corresponde a una rotación de las fuentes y de los campos; pero esa rotación es irrelevante cuando se integra una cantidad escalar en todo el ángulo sólido. El argumento deja de valer para cantidades vectoriales.

Problema 3:

Las placas de un capacitor están separadas una distancia d y existe entre ellas un campo eléctrico \mathbf{E} , uniforme y constante [fig. 3 (a)]. En $t = 0$ un electrón de carga q y masa m escapa con velocidad inicial igual a cero del centro de la placa a menor potencial y es acelerado hacia la otra placa, cumpliéndose que $|q\mathbf{E}| d/(mc^2) \gg 1$. El electrón atraviesa la segunda placa a través de un pequeño orificio.

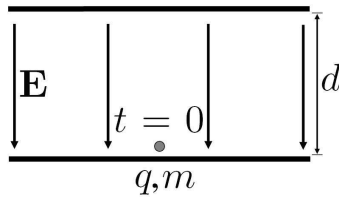


fig. 3 (a)



fig. 3 (b)

- Encuentre la posición del electrón en función del tiempo desde que sale de la primera placa y hasta que llega a la segunda.
- Encuentre la energía total radiada por el electrón.
- Un observador está en el punto P , a una distancia $R \gg d$ del centro del capacitor [fig. 3 (b)]. Encuentre los campos de radiación \mathbf{E}_{rad} y \mathbf{B}_{rad} en el punto P como función del tiempo y gráfíquelos cualitativamente. (Nota: no se pide resolver explícitamente la ecuación para el tiempo retardado.)

Solución:

- (a) Como $|q\mathbf{E}|d/(mc^2) \gg 1$, el movimiento será relativista. La partícula se acelera linealmente, y su trayectoria puede encontrarse siguiendo el método dado en clase. Uno comienza escribiendo las ecuaciones para el impulso $\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v}$ y la energía $\mathcal{E} = m\gamma c^2$,

$$\dot{\mathbf{p}} = q\mathbf{E}, \quad (48)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = q(\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}). \quad (49)$$

Tomando $\mathbf{E} = E\hat{x}$, y situando el origen de coordenadas en el punto desde el cual escapa inicialmente la partícula,

$$\dot{p}_x = qE, \quad (50)$$

$$\dot{p}_y = \dot{p}_z = 0, \quad (51)$$

$$\dot{\mathcal{E}} = qE\dot{x}. \quad (52)$$

De aquí y de las condiciones iniciales uno obtiene

$$p_x = qEt, \quad (53)$$

$$p_y = p_z = 0, \quad (54)$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 + qEx, \quad (55)$$

donde $\mathcal{E}_0 = mc^2$. Ahora bien, como en general $\mathcal{E} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)}$, puede escribirse

$$\mathcal{E}_0 + qEx = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (qEct)^2}, \quad (56)$$

y entonces

$$x(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEct}{\mathcal{E}_0} \right)^2} - 1 \right]. \quad (57)$$

Notar que E es una cantidad negativa, puesto que la placa desde la que escapa el electrón es la que está a menor potencial. El producto qE será entonces positivo.

- (b) La potencia emitida está dada por la fórmula de Larmor relativista

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \gamma^6 \left[(\dot{\beta})^2 - |\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}}|^2 \right]. \quad (58)$$

La aceleración es paralela a la velocidad, así que el último término es cero. La aceleración se obtiene de la expresión general, que surge de combinar las ecuaciones para $\dot{\mathbf{p}}$ y $\dot{\mathcal{E}}$,

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{m\gamma} \left[\mathbf{E} - \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] = \frac{q\mathbf{E}}{m\gamma^3}. \quad (59)$$

En el último paso se usó que \mathbf{E} y \mathbf{v} están en la misma dirección. En la expresión para la potencia los factores γ se cancelan y queda

$$P = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c} \left(\frac{qE}{mc} \right)^2, \quad (60)$$

que resulta ser independiente del tiempo. Mucho menos práctico para el cálculo de P hubiera resultado calcular por separado γ y $\dot{\beta}$ a partir de la ec. (57).

La energía total emitida por el electrón es $W = Pt_f$, donde t_f es el tiempo que tarda en atravesar el capacitor, dado por

$$d = \frac{\mathcal{E}_0}{qE} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{qEct_f}{\mathcal{E}_0} \right)^2} - 1 \right]. \quad (61)$$

De aquí resulta

$$t_f = \frac{\mathcal{E}_0}{qEc} \sqrt{\left[\frac{qEd}{\mathcal{E}_0} + 1 \right]^2 - 1} \simeq d/c, \quad (62)$$

donde la última aproximación corresponde a la condición $qEd/(mc^2) \gg 1$. La razón por la que el tiempo de viaje puede aproximarse a d/c corresponde al hecho de que el electrón rápidamente alcanza una velocidad cercana a c . El criterio para decir cuándo una partícula se vuelve relativista es comparar su energía total con su energía en reposo. Cuando la diferencia entre estas dos energías es del orden de la energía en reposo, el factor γ de la partícula se aparta significativamente de 1. A partir de la ec. (55) uno ve que en este problema eso sucede luego de que el electrón recorre una distancia del orden de $l_{\text{rel}} \equiv mc^2/(qE)$, que por las condiciones del problema es mucho menor que d . Esto quiere decir que, salvo una pequeña longitud de orden l_{rel} y un breve lapso inicial del orden de l_{rel}/c , en lo que a la cinemática se refiere, el electrón se mueve prácticamente con velocidad c .

Con la aproximación $t_f \simeq d/c$, resulta

$$W \simeq \frac{2}{3} q^2 d \left(\frac{qE}{mc^2} \right)^2, \quad (63)$$

que puede escribirse también como

$$\frac{W}{qEd} \simeq \frac{2}{3} \frac{r_c}{l_{\text{rel}}}, \quad (64)$$

donde $r_c = q^2/(mc^2)$ es el radio clásico del electrón. Aquí se pone de manifiesto que ignorar los efectos de la radiación sobre el movimiento de la carga, es decir que se cumpla $W/(qEd) \ll 1$, está justificado siempre que $r_c \ll l_{\text{rel}}$. La aceleración hasta $v \sim c$ debe llevarse a cabo en distancias grandes comparadas con r_c .

(c) Los campos de radiación para una carga que sigue la trayectoria $\mathbf{r}(t)$ vienen dados por

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{c} \left[\frac{\hat{\mathbf{n}} \times \{(\hat{\mathbf{n}} - \vec{\beta}) \times \dot{\vec{\beta}}\}}{R (1 - \vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}})^3} \right]_{\text{ret}}, \quad (65)$$

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} = [\hat{\mathbf{n}}]_{\text{ret}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}, \quad (66)$$

donde

$$R(t') = |\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')|, \quad (67)$$

$$\hat{\mathbf{n}}(t') = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}(t')}{R(t')}, \quad (68)$$

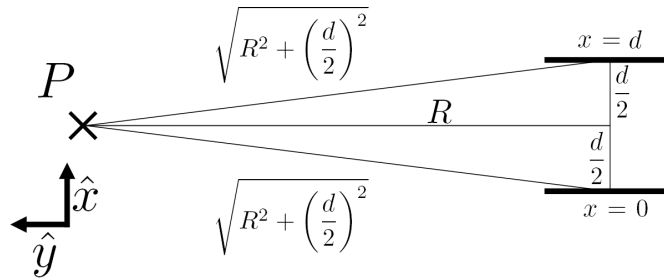
y las cantidades entre corchetes $[\dots]_{\text{ret}}$ deben ser evaluadas en el tiempo retardado $t'(\mathbf{r}, t)$, que satisface la ecuación $c(t - t') = R(t')$. [No confundir en esta notación R con R .] Para este problema en particular la ecuación es

$$c(t - t') = \sqrt{R^2 + [x(t') - d/2]^2}. \quad (69)$$

Los campos de radiación en el punto P son distintos de cero siempre que $t_1 \leq t \leq t_2$, donde t_1 es el instante en que llega la radiación emitida por el electrón en $t = 0$, y t_2 es el instante en que llega la radiación emitida por el electrón al dejar el capacitor en t_f . Estos tiempos son simplemente

$$t_1 = \frac{1}{c} \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}, \quad t_2 = \frac{1}{c} \sqrt{R^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2} + t_f = t_1 + t_f \simeq t_1 + \frac{d}{c}. \quad (70)$$

Fuera de esa ventana temporal, los campos de radiación son cero.



Tomando para P la posición $\mathbf{r} = R\hat{\mathbf{y}} + (d/2)\hat{\mathbf{x}}$, y usando que los campos de radiación provienen de una región de dimensiones $d \ll R$, se tendrá $\hat{\mathbf{n}} \simeq \hat{\mathbf{y}}$, $R \simeq R$ y $\vec{\beta} \cdot \hat{\mathbf{n}} \simeq 0$. Por otro lado, como la aceleración y la velocidad son paralelas es $\vec{\beta} \times \dot{\vec{\beta}} = 0$, exactamente. Reuniendo todo esto, y usando la ec. (59) para $\dot{\vec{\beta}}$, los campos de radiación en P están dados aproximadamente por

$$\mathbf{E}_P(t) \simeq -\frac{q}{R} \frac{qE}{mc^2} \left[\frac{1}{\gamma^3} \right]_{\text{ret}} \hat{x}, \quad (71)$$

$$\mathbf{B}_P(t) \simeq \frac{q}{R} \frac{qE}{mc^2} \left[\frac{1}{\gamma^3} \right]_{\text{ret}} \hat{z}, \quad (72)$$

si $t_1 \leq t \leq t_2$, y son cero fuera de ese intervalo. Cuanto más rápido se mueve la partícula menor es su aceleración, y por lo tanto los campos decaen a medida que la velocidad de la partícula aumenta. El factor γ puede calcularse de la ecuación (55) para la energía, usando $\mathcal{E} = m\gamma c^2$,

$$\gamma = 1 + \frac{qEx}{mc^2}. \quad (73)$$

La radiación que llega en t_1 corresponde a un $\gamma_1 = \gamma(0) = 1$, y la que llega en t_2 , a un $\gamma_2 = \gamma(t_f) = 1 + qEd/(mc^2) \simeq qEd/(mc^2)$. Las condiciones del problema implican $\gamma_2 \gg 1$, y por lo tanto los campos decaen grandemente cuando t se acerca a t_2 . Para graficar cualitativamente el comportamiento de los campos era suficiente con encontrar $\{t_1, t_2\}$ y $\{\gamma_1, \gamma_2\}$. Si uno quiere graficarlos con alguna precisión, es necesario resolver la ecuación para el tiempo retardado. Un gráfico típico es el mostrado aquí abajo (el campo está medido en unidades arbitrarias).

