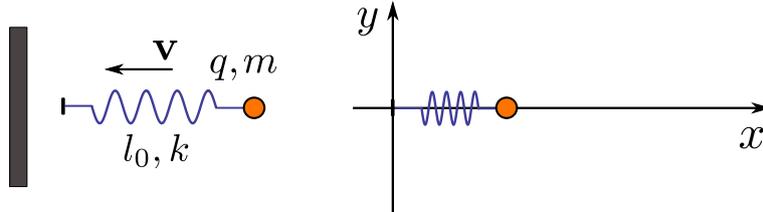


## Física Teórica 1 - 2<sup>do</sup> cuatrimestre de 2010 - 2<sup>do</sup> parcial y soluciones

■ **Problema 1.** Una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  está unida a un resorte de longitud natural  $l_0$  y constante elástica  $k$ . Inicialmente la partícula con el resorte se mueven a velocidad  $v_0$  mucho menor que  $c$  y tal que  $mv_0^2 \leq kl_0^2$ . El extremo libre del resorte choca eventualmente contra una pared fija, como muestra la figura.

- a) Encuentre la energía total radiada por la partícula.
- b) Elija algún punto sobre la pared, ubicado en la zona de radiación a una distancia  $r$  del punto de choque, y calcule el campo eléctrico de radiación. Grafíquelo cuidadosamente en función del tiempo.



**Solución.** (a) Tomemos el origen del tiempo en el momento en que el resorte llega a la pared y midamos la coordenada  $x$  respecto del punto de contacto del resorte con la pared. Mientras el resorte está en contacto con la pared, el movimiento de la partícula está regido por la siguiente ecuación,

$$\ddot{x} + \omega^2(x - l_0) = 0, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1)$$

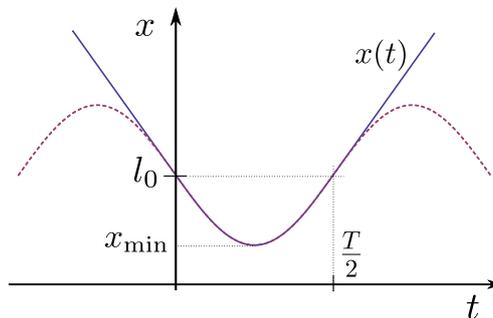
La solución puede buscarse en la siguiente forma, que ya satisface la condición inicial  $x(0) = l_0$ ,

$$x(t) = l_0 + A \sin \omega t, \quad (2)$$

La otra condición inicial,  $\dot{x}(0) = -v_0$ , implica  $A = -\frac{v_0}{\omega}$ . Finalmente,

$$x(t) = l_0 - \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t. \quad (3)$$

Esto es válido mientras el resorte ejerza una fuerza hacia la derecha, pero una vez que la partícula sobrepasa el punto  $x = l_0$  en su camino de regreso, el resorte pierde contacto con la pared y la partícula continúa moviéndose hacia la derecha con velocidad  $v_0$ .



Esto corresponde a medio período de oscilación. De manera que el intervalo de tiempo en donde la partícula está acelerada va de cero a  $T/2 = \pi/\omega$ . Durante este intervalo la aceleración es

$$\dot{v}(t) = v_0 \omega \sin \omega t, \quad (4)$$

la potencia irradiada

$$P(t) = \frac{2q^2}{3c^3} \dot{v}(t)^2, \quad (5)$$

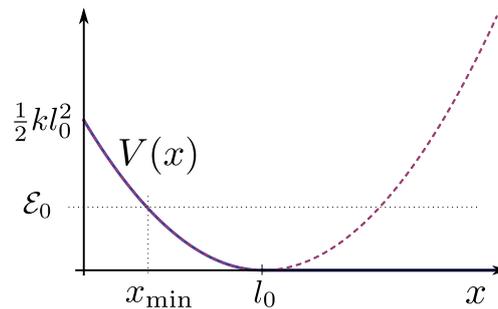
la energía total irradiada

$$W = \int_0^{T/2} dt \frac{2q^2}{3c^3} (v_0 \omega \sin \omega t)^2 = \frac{2q^2}{3c^3} v_0^2 \omega \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Para llegar a este resultado también podía seguirse el método usado en el problema 1 de la guía de radiación, cuyo resultado era

$$W = \frac{4q^2}{3m^2 c^3} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_{\min}}^{\infty} dx \frac{|V'(x)|^2}{\sqrt{\mathcal{E}_0 - V(x)}}. \quad (7)$$

Aquí el potencial  $V(x)$  es cero entre  $x = l_0$  e infinito, y es  $V(x) = k(x - l_0)^2/2$  entre  $x = 0$  y  $l_0$ .



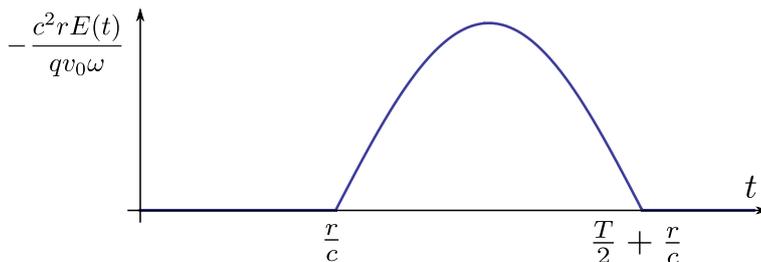
Al margen de todo esto, la condición  $mv_0^2 \leq kl_0^2$  significa que la partícula nunca llega a chocar contra la pared, sino que  $x_{\min} \geq 0$ , de manera que no es necesario preocuparse por definir el potencial para  $x < 0$ .

(b) Ahora hay que calcular los campos de radiación en un punto sobre la pared a una distancia  $r$  del punto de choque. La distancia  $r$  debía ser tal que el punto elegido estuviera en la zona de radiación, es decir,  $r \gg c/\omega$ . Como la partícula es no relativista también es  $c/\omega \gg l_0$  y en las expresiones de los campos siempre puede reemplazarse  $|\mathbf{r} - \mathbf{r}(t)|$  por  $r$ . Para una partícula no relativista, lejos de la partícula, es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = q \frac{\hat{r} \times [\hat{r} \times \dot{\mathbf{v}}(t - r/c)]}{c^2 r}. \quad (8)$$

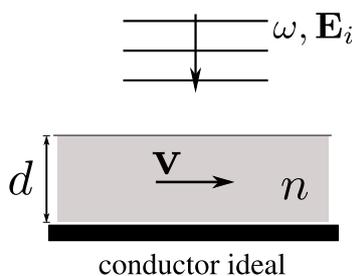
El origen se ha tomado en el punto de contacto del resorte con la pared. La aceleración aparece evaluada al tiempo retardado  $t' = t - r/c$ . Los detalles del movimiento de la partícula no intervienen en el cálculo del tiempo retardado puesto que  $r \gg l_0$  y la partícula es no relativista. Hay simetría de revolución alrededor del eje  $x$ , así que da lo mismo tomar cualquier punto sobre la pared. Si elegimos  $\mathbf{r} = r\hat{y}$ , resulta

$$\mathbf{E}(t) = -\frac{q}{c^2 r} v_0 \omega \sin \left( t - \frac{r}{c} \right) \hat{x}, \quad \frac{r}{c} \leq t \leq \frac{T}{2} + \frac{r}{c}. \quad (9)$$



Para cualquier punto de la pared a una distancia  $r \gg l_0$  del punto de contacto, todo ocurre como si estuviera pasando en el origen. La aceleración de la carga tiene lugar únicamente en una región del espacio de longitud  $l_0$  y durante un tiempo que va entre 0 y  $T/2$ . Para el observador a una distancia  $r$ , la radiación comienza a llegar a tiempo  $r/c$  y termina en  $T/2 + r/c$ .

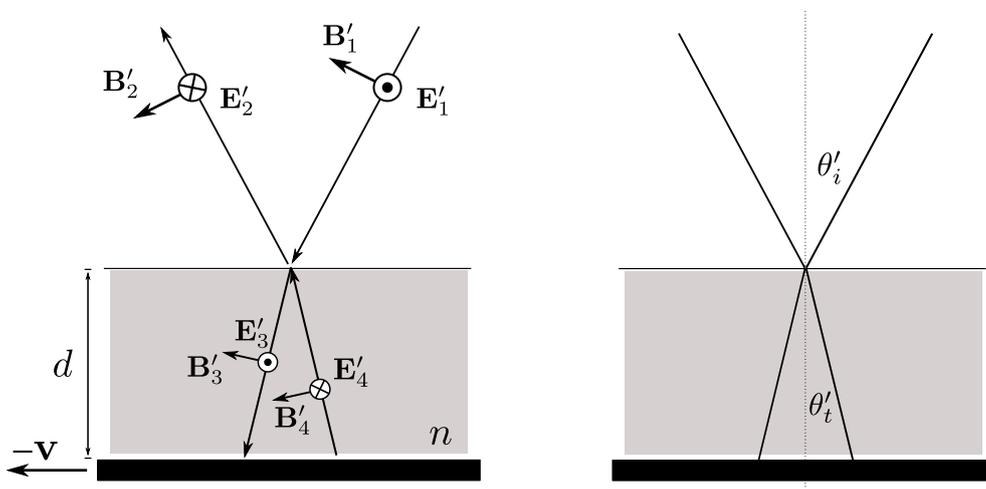
■ **Problema 2.** Sobre un conductor ideal hay un líquido de índice de refracción real  $n$  y permeabilidad  $\mu = 1$ . El líquido tiene una profundidad  $d$  y se mueve con velocidad  $v$  paralela a su superficie. La velocidad puede ser comparable a  $c$ . Una onda plana linealmente polarizada y de frecuencia  $\omega$  incide en forma normal sobre la superficie del líquido. La amplitud del campo eléctrico de la onda incidente es  $\mathbf{E}_i$  y es perpendicular a  $v$ .



- Encuentre la amplitud  $\mathbf{E}_r$  del campo eléctrico de la onda reflejada.
- ¿Cuál es la relación entre los módulos de  $\mathbf{E}_i$  y de  $\mathbf{E}_r$ ?
- ¿Cuál es el desfase entre la onda incidente y la reflejada?

[Nota: por amplitud se entiende lo siguiente:  $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{E}}_i e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)}$ .]

**Solución.** Pasando al sistema en que el líquido se encuentra en reposo el problema toma el siguiente aspecto,



Luego nos ocuparemos de calcular los ángulos y la amplitud de la onda incidente. Basta observar por ahora que en este sistema la onda incide con cierto ángulo y el conductor se mueve con velocidad  $v$  hacia la izquierda. En realidad, debido a que el conductor es ideal, da lo mismo que se mueva paralelo a su superficie o que no se mueva. Las condiciones  $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$  dentro del conductor son válidas en cualquier sistema de coordenadas, ya que los campos transforman linealmente entre sí. Dicho de otra forma, en el sistema en

reposito del conductor uno sabe que  $F^{\mu\nu} = 0$ , pero entonces  $F^{\mu\nu} = 0$  en cualquier sistema. En definitiva, las ecuaciones que hay que resolver en el sistema en reposo del líquido son, para la primera interfase,

$$E'_1 - E'_2 = E'_3 - E'_4 \quad (\text{conservación de } \mathbf{E} \text{ tangencial}),$$

$$\cos \theta'_i (E'_1 + E'_2) = n \cos \theta'_t (E'_3 + E'_4) \quad (\text{conservación de } \mathbf{H} \text{ tangencial}), \quad (10)$$

y para la segunda

$$E'_3 e^{i\varphi} = E'_4 e^{-i\varphi} \quad (\text{conservación de } \mathbf{E} \text{ tangencial}), \quad (11)$$

donde

$$\varphi = \mathbf{k}'_t \cdot d \hat{z} = \frac{\omega'}{c} n d \cos \theta'_t. \quad (12)$$

Escribiendo  $E'_4$  en términos de  $E'_3$  y reemplazando en las dos primeras ecuaciones, queda

$$E'_1 - E'_2 = -2i E'_3 e^{i\varphi} \sin \varphi,$$

$$\cos \theta'_i (E'_1 + E'_2) = 2n \cos \theta'_t E'_3 e^{i\varphi} \cos \varphi. \quad (13)$$

La solución para el campo de la onda reflejada es

$$E'_2 = \frac{n \cos \theta'_t \cos \varphi + i \cos \theta'_i \sin \varphi}{n \cos \theta'_t \cos \varphi - i \cos \theta'_i \sin \varphi} E'_1. \quad (14)$$

En el sistema del laboratorio, el campo de la onda reflejada es

$$\mathbf{E}_2 = \gamma(\mathbf{E}'_2 - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_2) = \gamma(1 - \beta \sin \theta'_i) \mathbf{E}'_2. \quad (15)$$

Por otro lado necesitamos escribir  $\mathbf{E}'_1$ , los ángulos  $\theta'_i$ ,  $\theta'_t$  y la fase  $\varphi$  en términos de los datos del problema. Para el campo incidente,

$$\mathbf{E}'_1 = \gamma(\mathbf{E}_1 + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_1) = \gamma \mathbf{E}_1. \quad (16)$$

Las fórmulas de aberración dan para el ángulo  $\theta'_i$

$$\sin \theta'_i = \beta, \quad \cos \theta'_i = 1/\gamma. \quad (17)$$

El ángulo  $\theta'_t$  está dado por la ley de Snell,  $\sin \theta'_i = n \sin \theta'_t$ , y su coseno es

$$\cos \theta'_t = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \beta^2}. \quad (18)$$

Para escribir la fase  $\varphi = (\omega'/c) n d \cos \theta'_t$  todavía necesitamos calcular  $\omega'$ , que está dada por Doppler,

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma \left( \frac{\omega}{c} - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{k}_i \right) = \gamma \frac{\omega}{c}. \quad (19)$$

Reuniendo todo, queda

$$\mathbf{E}_2 = \frac{\gamma \sqrt{n^2 - \beta^2} + i \tan \varphi}{\gamma \sqrt{n^2 - \beta^2} - i \tan \varphi} \mathbf{E}_1, \quad \varphi = \frac{\gamma \omega}{c} d \sqrt{n^2 - \beta^2}. \quad (20)$$

Cuando  $n \geq \beta$ , el factor que aparece multiplicando a  $\mathbf{E}_1$  es evidentemente un número complejo de módulo uno, lo que implica

$$|\mathbf{E}_2| = |\mathbf{E}_1|. \quad (21)$$

Para encontrar la diferencia de fase puede seguirse el mismo procedimiento que en el problema del prisma de la práctica de ondas,

$$e^{i\alpha} \equiv \frac{\gamma\sqrt{n^2 - \beta^2} + i \tan \varphi}{\gamma\sqrt{n^2 - \beta^2} - i \tan \varphi} = \frac{(\gamma\sqrt{n^2 - \beta^2} + i \tan \varphi)^2}{\gamma^2(n^2 - \beta^2) + \tan^2 \varphi}. \quad (22)$$

Luego,

$$e^{i\alpha/2} = \frac{\gamma\sqrt{n^2 - \beta^2} + i \tan \varphi}{\sqrt{\gamma^2(n^2 - \beta^2) + \tan^2 \varphi}}, \quad (23)$$

y de aquí

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\tan \varphi}{\gamma\sqrt{n^2 - \beta^2}}. \quad (24)$$

Cuando  $n < \beta$ , la raíz  $\sqrt{n^2 - \beta^2}$  es imaginaria, y lo mismo la fase  $\varphi$ . Si no estuviera el conductor, en el sistema en reposo del líquido se produciría una reflexión total. El factor que relaciona  $\mathbf{E}_2$  con  $\mathbf{E}_1$  sigue siendo de la forma  $e^{i\tilde{\alpha}}$ , con

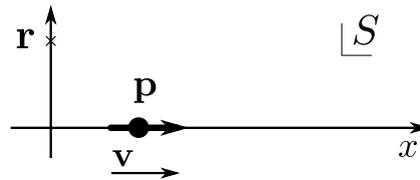
$$e^{i\tilde{\alpha}} = \frac{i\gamma\sqrt{\beta^2 - n^2} - \tanh \tilde{\varphi}}{i\gamma\sqrt{\beta^2 - n^2} + \tanh \tilde{\varphi}}, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\gamma\omega}{c} d \sqrt{\beta^2 - n^2}. \quad (25)$$

De aquí,

$$\tan \frac{\tilde{\alpha}}{2} = -\frac{\gamma\sqrt{\beta^2 - n^2}}{\tanh \tilde{\varphi}}. \quad (26)$$

Pensándolo en términos de reflexiones múltiples, uno esperaría que al hacerse  $d$  muy grande, la presencia del conductor sea irrelevante, porque en la primera interfase hay reflexión total y los campos se atenúan rápidamente dentro del líquido. Esto en verdad ocurre, ya que para  $d \gg c/(\omega\gamma)$  es  $\tanh \tilde{\varphi} \approx 1$ , y todo resulta independiente de  $d$ .

■ **Problema 3.** En el sistema de laboratorio  $S$ , un dipolo eléctrico ideal  $\mathbf{p}$  está orientado según  $x$ , se mueve con velocidad constante  $\mathbf{v} = v\hat{x}$  y pasa por el origen en  $t = 0$ . La velocidad puede ser comparable a  $c$ .



- a) Si  $S'$  es el sistema de referencia en donde el dipolo se encuentra en reposo en el origen, encuentre el valor del dipolo  $\mathbf{p}'$  en este sistema.
- b) En todo lo que sigue suponga que en  $S$  el dipolo está orientado y se mueve como antes, pero ahora su magnitud depende del tiempo,  $\mathbf{p}(t) = p(t) \hat{x}$ . Encuentre el valor del dipolo  $\mathbf{p}'(t')$  en  $S'$ .
- c) Considere el punto  $\mathbf{r} = y \hat{y}$  en el sistema  $S$ . Para este punto, escriba los campos de radiación  $\mathbf{E}(t)$  y  $\mathbf{B}(t)$ , todo medido en  $S$ .
- d) En el sistema  $S$ , calcule el vector de Poynting en el punto  $\mathbf{r} = y \hat{y}$ . Relacione su dirección con la posición aparente del dipolo vista desde  $\mathbf{r}$ .

**Solución.** (a) El dipolo puede pensarse en  $S$  como dos cargas separadas una distancia  $\epsilon$  y que se mueven a la misma velocidad  $\mathbf{v}$  según la línea que las une. Puesto que en  $S$  la distancia entre las cargas es un factor  $1/\gamma$  veces la distancia propia, en el sistema en que las cargas están en reposo, la distancia que las separa debe ser  $\epsilon' = \epsilon\gamma$ . Como las cargas en sí son invariantes, en  $S'$  es

$$\mathbf{p}' = \gamma \mathbf{p}. \quad (27)$$

(b) En  $S$  ahora es  $\mathbf{p}(t) = p(t) \hat{x}$ . Usando el resultado anterior uno estaría tentado de escribir

$$\mathbf{p}'(t)_S = p'(t)_S \hat{x}, \quad p'(t)_S = \gamma p(t)_S. \quad (28)$$

Aquí el subíndice  $S$  significa que aunque el momento dipolar  $\mathbf{p}'$  esté medido en  $S'$ , su valor está referido al tiempo  $t$  del sistema  $S$ . Para dejar escrito todo en términos de cantidades medidas en  $S'$ , hay que escribir  $t$  como función de  $t'$ . Como el dipolo está en el origen de  $S'$ , el evento completo asociado al dipolo en  $S'$  a tiempo  $t'$  es

$$(t', 0, 0, 0). \quad (29)$$

El mismo evento en  $S$  ocurre a tiempo  $t = \gamma t'$ . De manera que, expresado todo en  $S'$ , el resultado que estamos proponiendo es

$$\mathbf{p}'(t') = \gamma p(\gamma t') \hat{x}. \quad (30)$$

El factor  $\gamma$  multiplicando  $t'$  expresa el fenómeno de dilatación temporal. Si el dipolo oscila en  $S$  con frecuencia  $\omega$ , en  $S'$  lo hace con frecuencia  $\gamma\omega$ . Desde  $S$  debe verse evolucionar más lentamente.

### Dos caminos para justificar mejor el resultado anterior.

*Primer método.* El dipolo en  $S$  puede modelarse como dos cargas, una  $q_1 = -q$  y otra  $q_2 = q$ , que se mueven según

$$x_1(t) = vt, \quad x_2(t) = vt + \epsilon d(t), \quad (31)$$

respectivamente. Al final habrá que tomar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  y  $q \rightarrow \infty$  de manera tal que

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow \infty} q\epsilon d(t) = p(t). \quad (32)$$

En  $S'$  la primera carga estará fija en el origen, pero la segunda se moverá según

$$x'_2(t)_S = \gamma [vt + x_2(t) - vt] = \gamma \epsilon d(t)_S. \quad (33)$$

Para expresar la trayectoria en términos del tiempo en  $S'$  hay que completar la descripción del evento con la relación entre  $t$  y  $t'$ , lo que implica resolver la ecuación

$$t' = \gamma \left\{ t - \frac{v}{c^2} [vt + \epsilon d(t)] \right\} \rightarrow t(t'). \quad (34)$$

Por lo pronto puede escribirse

$$t = \gamma t' + \gamma^2 \frac{v}{c^2} \epsilon d(t). \quad (35)$$

Entonces, para la segunda partícula,  $t(t')$  no es simplemente  $t = \gamma t'$ . Es importante conservar todas las correcciones hasta orden  $\epsilon$ , porque en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ , si aparecen multiplicadas por  $q$ , van a dar un resultado finito. Sin embargo, como  $x'_2$  es ya de orden  $\epsilon$  poco importa en este caso conservar las correcciones al valor de  $t(t')$  y por lo tanto

$$p'(t') = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow \infty} q \gamma \epsilon d(t)_S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{q \rightarrow \infty} q \gamma \epsilon d(\gamma t' + \mathcal{O}(\epsilon)) = \gamma p(\gamma t'), \quad (36)$$

que era lo que habíamos escrito antes.

*Segundo método.* Este método es un poco más complicado y no está libre de peligros. En lugar de pensar al dipolo como dos cargas, puede describirse en términos de un cuadvectores densidad de corriente. La densidad de carga es

$$\rho(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{p}(t) \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) = -p(t) \delta'(x - vt) \delta(y) \delta(z), \quad (37)$$

y la densidad de corriente

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \left[ -\mathbf{p}(t) \cdot \nabla \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \right] \mathbf{v} + \dot{\mathbf{p}}(t) \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \\ &= \left[ -vp(t) \delta'(x - vt) + \dot{p}(t) \delta(x - vt) \right] \delta(y) \delta(z) \hat{x}. \end{aligned} \quad (38)$$

(Esta expresión para la densidad de corriente se obtiene construyendo al dipolo con dos cargas y tomando el límite.) Aplicando la transformación que va de  $S$  a  $S'$  resulta

$$\begin{aligned} \rho'(\mathbf{r}, t)_S &= \gamma \left[ \rho(\mathbf{r}, t) - \frac{v}{c^2} j_x(\mathbf{r}, t) \right] \\ &= \gamma \left\{ -p(t) \delta'(x - vt) - \frac{v}{c^2} \left[ -vp(t) \delta'(x - vt) + \dot{p}(t) \delta(x - vt) \right] \right\} \delta(y) \delta(z) \\ &= \left[ -\frac{1}{\gamma} p(t) \delta'(x - vt) - \gamma \frac{v}{c^2} \dot{p}(t) \delta(x - vt) \right] \delta(y) \delta(z). \end{aligned} \quad (39)$$

Para dejar escrito todo en términos de las coordenadas de  $S'$ , hay que escribir  $\mathbf{r}$  y  $t$  como funciones de  $\mathbf{r}'$  y  $t'$ . Así resulta

$$x - vt = \frac{x'}{\gamma}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma \left( t' + \frac{v^2}{c} x' \right). \quad (40)$$

El primer término dentro del corchete en la ec. (39) pasa a ser

$$-\frac{1}{\gamma}p(t)\delta'(x-vt) = -\frac{1}{\gamma}p\left(\gamma\left[t' + \frac{v^2}{c}x'\right]\right)\delta'(x'/\gamma) = -\gamma p\left(\gamma\left[t' + \frac{v^2}{c}x'\right]\right)\delta'(x'), \quad (41)$$

y el segundo

$$-\gamma\frac{v}{c^2}\dot{p}(t)\delta(x-vt) = -\gamma\frac{v}{c^2}\dot{p}(\gamma t')\delta(x'/\gamma) = -\gamma^2\frac{v}{c^2}\dot{p}(\gamma t')\delta(x'). \quad (42)$$

Ustedes pueden demostrar el resultado que se usó en la última igualdad de la ec. (41), a saber,  $\delta'(x'/\gamma) = \gamma^2\delta'(x')$ . No debe olvidarse que  $\delta'$  es la derivada de la delta, no la delta en  $S'$ , si es que eso quiere decir algo. La cuestión es ver qué significa, en el sentido de las distribuciones, la función que aparece en (41),

$$p\left(\gamma\left[t' + \frac{v^2}{c}x'\right]\right)\delta'(x'). \quad (43)$$

Para eso usamos una función de prueba  $g(x')$ ,

$$\int dx' p\left(\gamma\left[t' + \frac{v^2}{c}x'\right]\right)\delta'(x')g(x') = -\gamma\frac{v^2}{c}\dot{p}(\gamma t')g(0) - p(\gamma t')g'(0). \quad (44)$$

De aquí se ve que la distribución que estamos buscando puede escribirse como

$$p\left(\gamma\left[t' + \frac{v^2}{c}x'\right]\right)\delta'(x') = -\gamma\frac{v^2}{c}\dot{p}(\gamma t')\delta(x') + p(\gamma t')\delta'(x'). \quad (45)$$

Cuando se reemplazan (42) y (45) en la expresión (39) para  $\rho'$ , los términos en donde aparece  $\dot{p}$  se cancelan y queda

$$\rho'(\mathbf{r}', t') = \gamma p(\gamma t')\delta'(x')\delta(y')\delta(z') = \mathbf{p}'(t') \cdot \nabla\delta(\mathbf{r}'), \quad (46)$$

donde, como antes,  $\mathbf{p}'(t') = \gamma p(\gamma t')\hat{x}$ .

(c) Para escribir los campos de radiación del dipolo en  $S$  lo que puede hacerse es escribirlos primero en  $S'$ , donde el dipolo está en reposo, y transformarlos a  $S$ . Los campos de radiación del dipolo en reposo en el origen de  $S'$  son, exactamente,

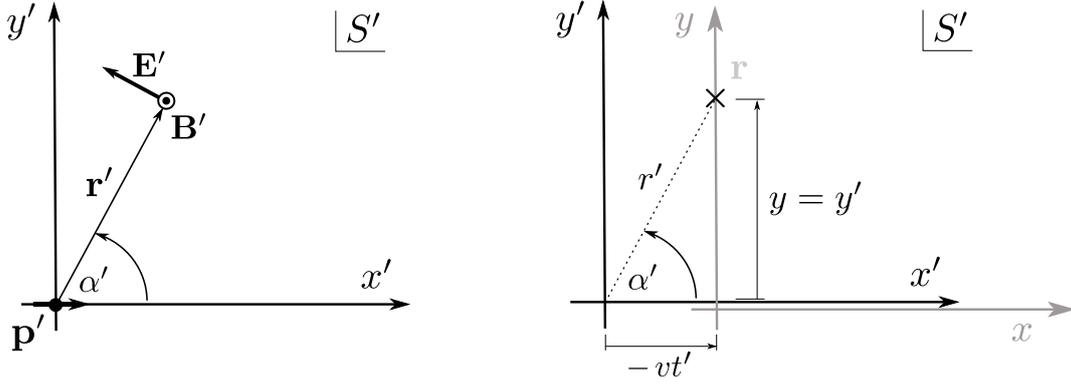
$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}', t') = \frac{\hat{r}' \times [\hat{r}' \times \ddot{\mathbf{p}}'(t' - r'/c)]}{c^2 r'}, \quad \mathbf{B}' = \hat{r}' \times \mathbf{E}'. \quad (47)$$

En realidad sólo se pide calcular los campos en  $S$  en puntos de la forma  $\mathbf{r} = y\hat{y}$ . El evento completo sería  $x^\mu = (ct, 0, y, 0)$ . En  $S'$ , este evento corresponde a

$$x^{\mu'} = (\gamma t, -\gamma vt, y, 0). \quad (48)$$

Se trata siempre de puntos en el plano  $xy$ . En términos del ángulo  $\alpha'$  que forma  $\mathbf{r}'$  con el eje  $x$ , en el plano  $xy$  los campos en  $S'$  son

$$\mathbf{E}' = \frac{\sin \alpha'}{c^2 r'} \left[ -\sin \alpha' \hat{x} + \cos \alpha' \hat{y} \right] \ddot{p}'(t' - r'/c), \quad \mathbf{B}' = \frac{\sin \alpha'}{c^2 r'} \ddot{p}'(t' - r'/c) \hat{z}. \quad (49)$$



Transformados a  $S$ , pero escritos aún en términos de las coordenadas de  $S'$ , son

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_x + \gamma (\mathbf{E}'_y - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_z) = \frac{\sin \alpha'}{c^2 r'} \left[ -\sin \alpha' \hat{x} + \gamma (\cos \alpha' + \beta) \hat{y} \right] \ddot{\mathbf{p}}'(t' - r'/c),$$

$$\mathbf{B} = \gamma (\mathbf{B}' + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}'_y) = \frac{\sin \alpha'}{c^2 r'} \gamma (1 + \beta \cos \alpha') \ddot{\mathbf{p}}'(t' - r'/c) \hat{z}. \quad (50)$$

Esto debe complementarse con los valores de  $\alpha'$ ,  $r'$ ,  $t'$  y  $\ddot{\mathbf{p}}'$  en términos de las coordenadas y definiciones en el sistema  $S$ , que se leen a partir de las ecs. (30) y (48):

$$r' = \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2}, \quad t' = \gamma t, \quad \sin \alpha' = \frac{y}{r'}, \quad \cos \alpha' = -\frac{\gamma vt}{r'}, \quad (51)$$

$$\ddot{\mathbf{p}}(t') = \gamma^3 \ddot{\mathbf{p}}(\gamma t') \rightarrow \ddot{\mathbf{p}}(t' - r'/c) = \gamma^3 \ddot{\mathbf{p}} \left( \gamma \left[ \gamma t - \frac{1}{c} \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2} \right] \right). \quad (52)$$

Aunque nunca lo calculamos directamente, el tiempo al que está evaluado  $\ddot{\mathbf{p}}$  es el tiempo retardado correspondiente a una partícula moviéndose a velocidad constante sobre el eje  $x$  vista desde  $\mathbf{r} = y\hat{y}$ . Así que, en definitiva, la propia transformación de los campos se encarga de dar los tiempos y las posiciones retardadas correctas, sin necesidad de resolver la ecuación  $c(t - t') = |\mathbf{R}(t')|$ . En el ítem siguiente, al calcular la dirección del vector de Poynting, también queda claro que los campos son perpendiculares a la línea de visión que va desde la posición retardada del dipolo al punto  $\mathbf{r}$ .

Hay que notar que los campos no se pueden calcular en  $S$  usando las fórmulas de radiación dipolar, porque éstas son válidas únicamente para movimientos no relativistas. Para cargas sueltas ustedes conocen las expresiones de los campos para movimientos arbitrarios. Hay fórmulas análogas para dipolos. El campo eléctrico de radiación para un dipolo que se mueve a velocidad constante es

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \left[ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{p}})}{(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})^3 R} \right]_{\text{ret}}, \quad (53)$$

donde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (54)$$

Para mostrar que esto lleva al mismo resultado de antes, hay que usar que  $[(1 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{n})R]_{\text{ret}} = r'/\gamma$  y que  $\mathbf{R}_\perp = \mathbf{r}'_\perp = y\hat{y}$ .

(d) El vector de Poynting en  $\mathbf{r} = y\hat{y}$  es

$$\mathbf{S} \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}, \quad (55)$$

donde los campos son los calculados en el ítem anterior. Para calcular el módulo de  $\mathbf{S}$  puede usarse el resultado general de campos de radiación

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{E}|^2 = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{B}|^2. \quad (56)$$

De las fórmulas anteriores es fácil comprobar que  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{E}|$ , pero, puestos a calcular, lo más directo es escribir  $|\mathbf{B}|$ ,

$$|\mathbf{S}| = \frac{c}{4\pi c^3} \left[ \frac{\sin \alpha'}{r'} \gamma (1 + \beta \cos \alpha') \ddot{p}'(t' - r'/c) \right]^2. \quad (57)$$

La dirección del vector de Poynting es la misma que la del vector  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ . Omitiendo las constantes multiplicativas,

$$\mathbf{E} \times \mathbf{B} \propto \left[ -\sin \alpha' \hat{x} + \gamma(\cos \alpha' + \beta) \hat{y} \right] \times \hat{z} = \sin \alpha' \hat{y} + \gamma(\cos \alpha' + \beta) \hat{x}. \quad (58)$$

En términos de las coordenadas en  $S$ , queda

$$\sin \alpha' \hat{y} + \gamma(\cos \alpha' + \beta) \hat{x} = \frac{y\hat{y} - \gamma \left( \gamma vt - \beta \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2} \right) \hat{x}}{\sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2}}. \quad (59)$$

La dirección de este vector es la misma que la de este otro

$$\mathbf{R}_{\text{ret}}(t) = \mathbf{r} - x_{\text{ap}}(t)\hat{x}, \quad (60)$$

donde  $\mathbf{r} = y\hat{y}$ , y

$$x_{\text{ap}}(t) = \gamma \left( \gamma vt - \beta \sqrt{(\gamma vt)^2 + y^2} \right). \quad (61)$$

Los que recuerden los resultados acerca de la posición aparente de puntos que se mueven a velocidad constante, reconocerán en  $x_{\text{ap}}$  la posición aparente sobre el eje  $x$  del dipolo visto desde el punto  $\mathbf{r} = y\hat{y}$ . Y en verdad el vector de Poynting debe estar en la dirección que une al punto de observación con la posición aparente de la partícula, puesto que por definición la radiación procede de la posición de la imagen.

