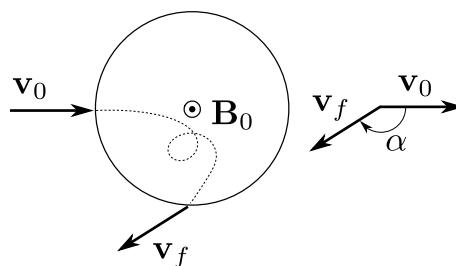


Física Teórica 1 - 1er. cuatrimestre de 2011

Segundo parcial (4/7/2011), con soluciones

**Problema 1.** Un haz compuesto por partículas de carga  $q$  y masa  $m$  ingresa en el campo magnético uniforme  $B_0 \hat{z}$  generado por un solenoide infinito de radio  $a$ . Las partículas ingresan perpendicularmente a la pared del solenoide, son aceleradas por el campo magnético y eventualmente vuelven a cruzar la pared y escapan. La velocidad inicial de las partículas es  $v_0$  y puede o no ser comparable a  $c$ .

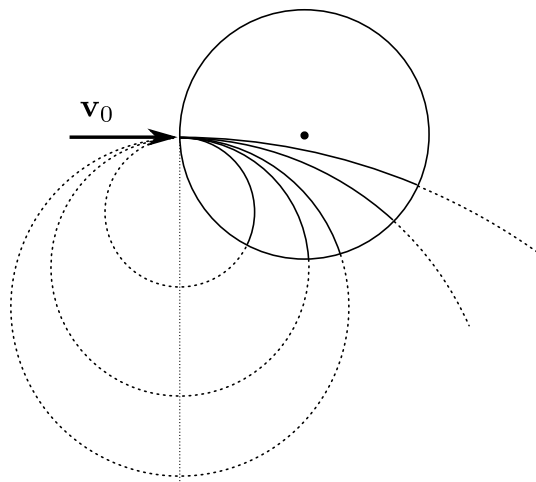
- Encuentre el ángulo de deflexión  $\alpha$  del haz, indicado en la figura.
- Calcule la energía total radiada por cada partícula durante su paso por el solenoide.
- Para la energía calculada en el ítem anterior, analice los casos límite  $\beta_0 \ll 1$  y  $\gamma_0 \gg 1$ .



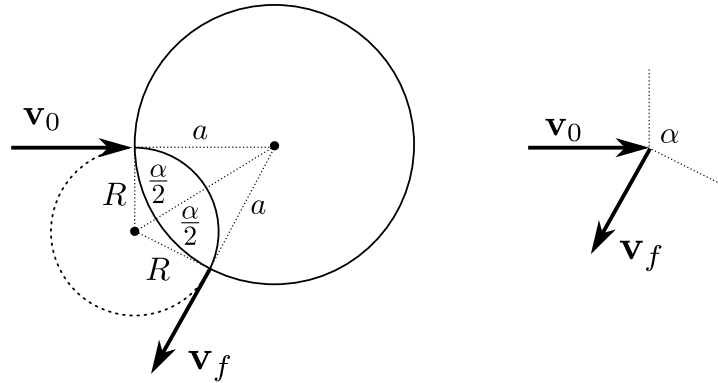
**Solución.** Una vez que entran al solenoide, las partículas describen un arco de circunferencia en el plano  $xy$ , y cuyo radio puede obtenerse a partir de la aceleración,

$$m\gamma_0 \frac{v^2}{R} = q\beta_0 B_0 \Rightarrow R = \frac{m\gamma_0 c^2 \beta_0}{qB_0}.$$

La única diferencia que hay con el caso no relativista es el factor  $\gamma$  que afecta a la masa. La velocidad de las partículas es siempre  $\beta_0$ . Como las partículas entran perpendiculares al solenoide, el centro de la circunferencia debe estar sobre la línea que es perpendicular a  $v_0$  y que es tangente al solenoide en el punto de ingreso de las partículas, como muestra la figura. Debido a que se ha supuesto que tanto  $q$  como  $B_0$  son cantidades positivas, la fuerza magnética tiende a desviar las partículas hacia abajo.



A partir de la figura es fácil ver que la trayectoria es simétrica respecto del plano que pasa por el eje del solenoide y por el centro de la circunferencia que siguen las partículas. Así, las partículas también salen del solenoide perpendiculares a su superficie.



En la figura se ve que el ángulo de desviación  $\alpha$  es

$$\alpha = 2 \arctan \frac{a}{R}.$$

Por otro lado, el tiempo que le toma a cada partícula entrar y salir del solenoide es

$$T = \frac{\alpha R}{v_0}.$$

Durante su paso por el solenoide cada partícula experimenta una aceleración de módulo constante

$$\dot{\beta} = \frac{q\beta_0 B_0}{m\gamma_0 c}.$$

La potencia radiada es también constante

$$P = \frac{2q^2}{3c} \gamma_0^6 [\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta}_0 \times \boldsymbol{\beta})^2] = \frac{2q^2}{3c} \gamma_0^4 \dot{\beta}^2 = \frac{2(q^2 \beta_0 B_0 \gamma_0)^2}{3m^2 c^3}.$$

La energía total radiada por cada partícula es  $\mathcal{E} = TP$ ,

$$\mathcal{E} = \frac{2q^2 \gamma_0^4 \dot{\beta}^2}{3c} \frac{\alpha R}{v_0} = \frac{4q^3 \beta_0^2 B_0 \gamma_0^3}{3mc^2} \arctan \left( \frac{aqB_0}{m\gamma_0 c^2 \beta_0} \right).$$

En el límite en que  $\gamma_0 \gg 1$ , la partícula prácticamente pasa sin desviarse,

$$\alpha \approx \frac{2a}{R}, \quad T \approx \frac{2a}{v_0}, \quad \mathcal{E} \approx \frac{4a\beta_0}{3} \left( \frac{q^2 B_0 \gamma_0}{mc^2} \right)^2.$$

En el otro límite,  $\beta_0 \ll 1$ , lo que implica  $\gamma_0 \approx 1$ , y  $R \approx mc^2 \beta_0 / (qB_0)$ . Para  $\beta_0$  suficientemente chico,  $a/R$  puede ser tan grande como se quiera, de modo que

$$\alpha = 2 \arctan \frac{a}{R} \approx \pi.$$

Luego de describir medio círculo, cada partícula vuelve prácticamente por donde vino. El tiempo que permanecen las partículas dentro del solenoide es

$$T = \frac{\alpha R}{v_0} \approx \frac{\pi mc}{qB_0}.$$

La potencia es

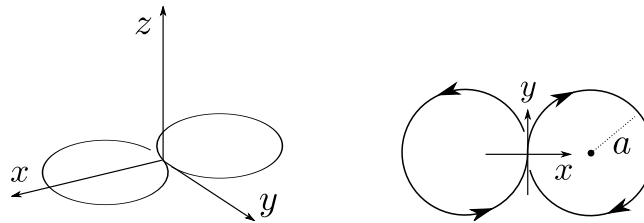
$$P = \frac{2(q^2\beta_0 B_0 \gamma_0)^2}{3m^2 c^3} \approx \frac{2(q^2 v_0 B_0)^2}{3m^2 c^5},$$

y la energía total radiada por cada partícula

$$\mathcal{E} \approx \frac{2\pi q^3 \beta_0^2 B_0}{3mc^2}.$$

**Problema 2.** Una carga  $q$  se mueve con velocidad constante  $v \ll c$ , siguiendo una figura con forma de ocho compuesta por dos círculos de radio  $a$  que se tocan tangencialmente. En  $t = 0$  la carga está en el centro del ocho y se mueve de modo que  $\dot{x}$  e  $\dot{y}$  son mayores que cero.

- Encuentre los campos de radiación  $\mathbf{E}_{\text{rad}}(t, \mathbf{r})$  y  $\mathbf{B}_{\text{rad}}(t, \mathbf{r})$  a más bajo orden no nulo en el desarrollo multipolar.
- Grafique cualitativamente el campo  $\mathbf{E}_{\text{rad}}$  en función del tiempo para un punto sobre el eje  $z$ .
- Encuentre la energía que irradia la partícula en cada ciclo.



**Solución.** Puesto que la partícula tiene un momento dipolar eléctrico con derivada segunda respecto del tiempo distinta de cero, el primer orden no nulo en el desarrollo multipolar de sus campos de radiación será el dipolar eléctrico.

La partícula recorre alternativamente dos círculos de radio  $a$ . Un círculo es recorrido en el sentido de las agujas del reloj y el otro, en sentido contrario. El período del movimiento es  $T = 4\pi a/v$ . El inicio de cada ciclo ocurre según la siguiente secuencia de tiempos

$$t_n = nT,$$

con  $n$  entero, entre menos y más infinito. Durante cada intervalo entre  $t_n$  y  $t_n + T/2$ , la partícula recorre el círculo de la derecha, y entre  $t_n + T/2$  y  $t_n + T$ , recorre el círculo de la izquierda. Podemos definir dos conjuntos de intervalos, uno que incluya todos los intervalos durante los cuales la partícula recorre el círculo de la derecha, y el otro que incluya aquellos durante los cuales la partícula recorre el círculo de la izquierda,

$$I_d = \bigcup_{n=0, \pm 1, \pm 2} \left( nT, (n + \frac{1}{2})T \right),$$

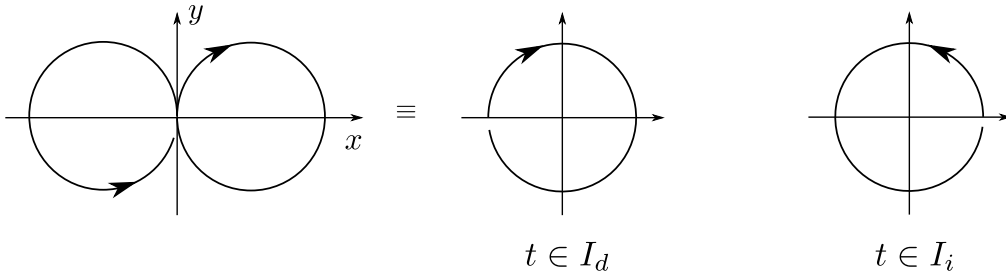
$$I_i = \bigcup_{n=0, \pm 1, \pm 2} \left( (n + \frac{1}{2})T, nT \right).$$

Definiendo  $\omega = v/a$ , la posición de la partícula en cada ciclo vendrá dada por:

$$\begin{cases} x(t) = a(1 - \cos \omega t), \\ y(t) = a \sin \omega t, \end{cases} \quad \text{si } t \in I_d;$$

$$\begin{cases} x(t) = a(-1 + \cos \omega t), \\ y(t) = a \sin \omega t, \end{cases} \quad \text{si } t \in I_i.$$

Para calcular el campo de radiación lejos de la partícula, y dada la condición  $v \ll c$ , importa únicamente conocer la aceleración en función del tiempo. Al tomar las derivadas de la posición respecto del tiempo, el hecho de que el centro de cada círculo se encuentra desplazado del origen resulta irrelevante. A todos los efectos, puede pensarse que durante cada ciclo la partícula recorre dos veces un círculo de radio  $a$  centrado en el origen, una vez en un sentido y otra en el sentido contrario. En definitiva todo se reduce a calcular los campos de un dipolo que rota en el origen.



Cuando la partícula rota en el sentido de las agujas del reloj, tenemos

$$\ddot{\mathbf{p}} = q\omega^2 a [\cos(\omega t) \hat{x} - \sin(\omega t) \hat{y}].$$

La base natural para escribir los campos en un punto  $\mathbf{r} = r\hat{r}$  son los versores  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  y  $\hat{\phi}$  asociados a  $\mathbf{r}$ . Para eso conviene escribir  $\hat{x}$  y  $\hat{y}$  en esa base,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \cos \varphi \sin \theta \hat{r} + \cos \varphi \cos \theta \hat{\theta} - \sin \varphi \hat{\phi}, \\ \hat{y} &= \sin \varphi \sin \theta \hat{r} + \sin \varphi \cos \theta \hat{\theta} + \cos \varphi \hat{\phi}. \end{aligned}$$

Luego, operando un poco,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(t, \mathbf{r}) = \frac{\hat{r} \times [\hat{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t')]}{c^2 r} = \frac{q\omega^2 a}{c^2 r} [-\cos \theta \cos(\omega t' + \varphi) \hat{\theta} + \sin(\omega t' + \varphi) \hat{\phi}], \quad \text{si } t' \in I_d, \quad (1)$$

donde  $t' = t - r/c$ . El campo magnético es  $\mathbf{B}_{\text{rad}} = \hat{r} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}$ .

Cuando la partícula recorre el círculo en el sentido contrario al de las agujas del reloj, es

$$\ddot{\mathbf{p}} = -q\omega^2 a [\cos(\omega t) \hat{x} + \sin(\omega t) \hat{y}].$$

Para los campos de radiación se puede usar el resultado (1), sustituyendo  $\ddot{\mathbf{p}}$  por  $-\ddot{\mathbf{p}}$  y  $\omega$  por  $-\omega$ ,

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(t, \mathbf{r}) = \frac{q\omega^2 a}{c^2 r} [\cos \theta \cos(\omega t' - \varphi) \hat{\theta} + \sin(\omega t' - \varphi) \hat{\phi}], \quad \text{si } t' \in I_i.$$

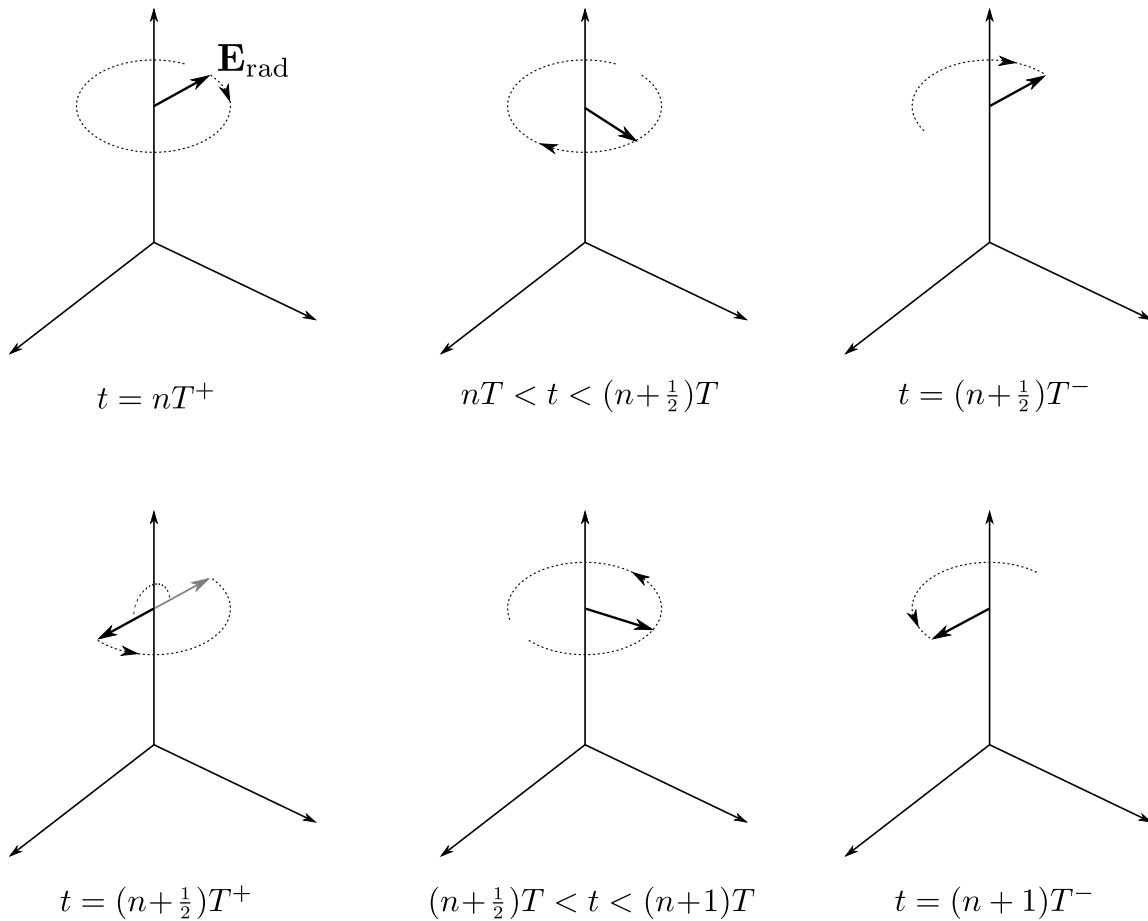
Al pasar de un círculo al otro, la aceleración de la partícula cambia bruscamente de signo. Los campos de radiación son discontinuos cada vez que ocurre esto.

Sobre puntos del eje  $z$ ,  $\theta = 0$  si  $z > 0$  o  $\theta = \pi$ , si  $z < 0$ . Da lo mismo tomar cualquier valor de  $\varphi$ . Tomemos el caso  $z > 0$ , y elijamos  $\varphi = 0$ , lo que implica  $\hat{\theta} = \hat{x}$  y  $\hat{\varphi} = \hat{y}$ . Entonces resulta

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q\omega^2 a}{c^2 z} \left\{ -\cos[\omega(t - z/c)] \hat{x} + \sin[\omega(t - z/c)] \hat{y} \right\}, \quad \text{si } t - z/c \in I_d, \quad (2)$$

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{q\omega^2 a}{c^2 z} \left\{ \cos[\omega(t - z/c)] \hat{x} + \sin[\omega(t - z/c)] \hat{y} \right\}, \quad \text{si } t - z/c \in I_i. \quad (3)$$

La siguiente figura muestra la evolución de  $\mathbf{E}_{\text{rad}}$  durante todo un ciclo.



En cada ciclo, la energía radiada por la partícula será el doble de lo que irradia al recorrer cualquiera de los dos círculos. Para radiación dipolar eléctrica,

$$P(t) = \frac{2}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}(t)|^2.$$

Como el módulo de la aceleración es constante, salvo durante las transiciones de un círculo al otro, la potencia será independiente del tiempo,

$$P = \frac{2}{3c^3} (qa\omega^2)^2 = \frac{2q^2 v^4}{3a^2 c^3}.$$

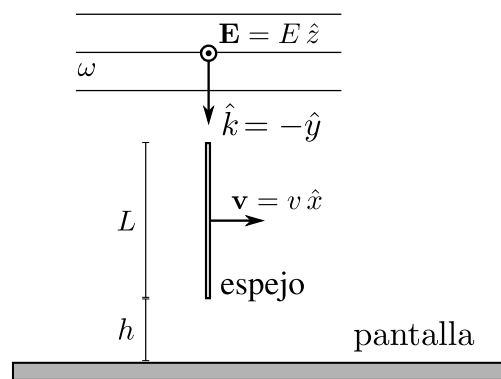
Para ver que las unidades son las correctas, esto puede escribirse reemplazando un factor  $v/a$  por  $4\pi/T$ ,

$$P = \frac{8\pi}{3} \frac{1}{T} \frac{q^2}{a} \beta^3.$$

La energía radiada por ciclo es

$$\mathcal{E} = TP = \frac{8\pi}{3} \frac{q^2}{a} \beta^3.$$

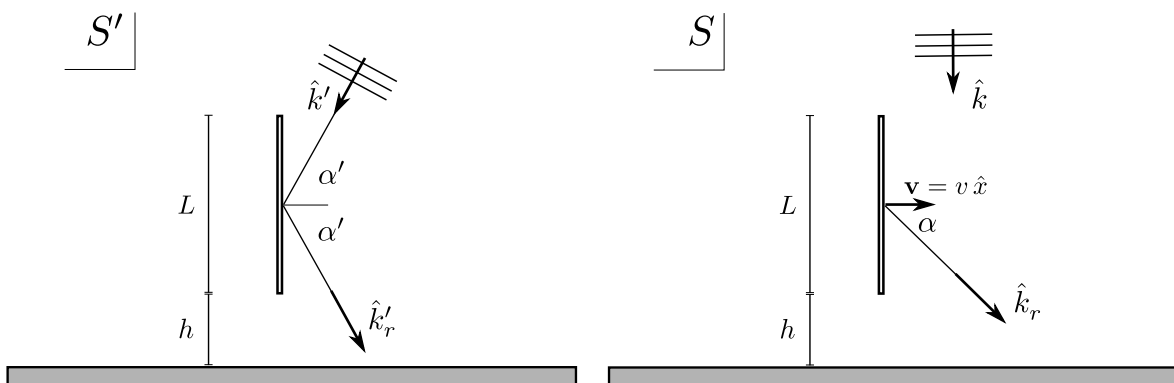
**Problema 3.** Un espejo perfecto de longitud  $L$  y espesor despreciable se mueve en la dirección de su normal con velocidad constante  $v > 0$ . En  $t = 0$  el espejo pasa por  $x = 0$ . Una onda plana linealmente polarizada, de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $\mathbf{E} = E \hat{z}$ , se propaga en la dirección  $\hat{k} = -\hat{y}$ . A una distancia  $h$  debajo del espejo hay un pantalla horizontal. Sobre la pantalla, el espejo proyecta una sombra y hay, además, una región doblemente iluminada, tanto por la onda original como por la reflejada en el espejo.



- Encuentre la posición en función del tiempo de la sombra que el espejo produce sobre la pantalla, y la posición en función del tiempo de la región que recibe la luz reflejada por el espejo.
- Encuentre la frecuencia de la luz reflejada por el espejo.
- Encuentre el valor medio del flujo de energía por unidad de área sobre la región de la pantalla que recibe la luz reflejada por el espejo.

A los fines de resolver el problema de la reflexión por el espejo, pueden despreciarse los efectos de borde y la influencia de la pantalla sobre el campo de radiación. El espejo puede considerarse infinito en la dirección  $z$ .

**Solución.** El problema se analiza más fácilmente en el sistema  $S'$  en que el espejo se encuentra en reposo, con su centro en el origen de coordenadas. La figura de la izquierda muestra el estado de cosas en este sistema.



Notemos que, por ser distancias medidas en la dirección transversal a la velocidad, la altura  $h$  y la longitud  $L$  son las mismas en los dos sistemas. Si en el sistema original el cuadrivector  $k^\mu$  de la onda incidente es

$$k^\mu = \left( \frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) = \frac{\omega}{c} (1, 0, -1, 0),$$

en el sistema  $S'$  es

$$k^{\mu'} = \left( \frac{\omega'}{c}, \mathbf{k}' \right) = \frac{\gamma\omega}{c} \left( 1, -\beta, -\frac{1}{\gamma}, 0 \right).$$

El ángulo  $\alpha'$  indicado en la figura está caracterizado por

$$\cos \alpha' = \beta, \quad \sin \alpha' = 1/\gamma. \quad (4)$$

En  $S'$  el cuadrivector número de onda de la onda reflejada por el espejo difiere del de la onda incidente en el signo de la componente  $x$ ,

$$k_r^{\mu'} = \gamma \frac{\omega}{c} \left( 1, \beta, -\frac{1}{\gamma}, 0 \right).$$

En el sistema original, el cuadrivector  $k_r^\mu$  de la onda reflejada es

$$k_r^\mu = \gamma^2 (1 + \beta^2) \frac{\omega}{c} \left( 1, \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, -\frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta^2)}, 0 \right). \quad (5)$$

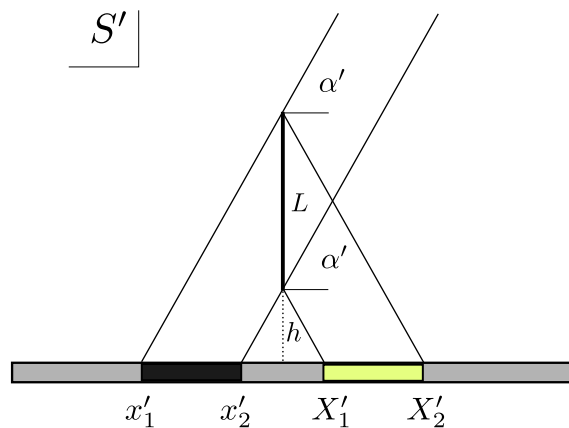
De aquí se lee directamente la frecuencia de la onda reflejada,

$$\omega_r = \gamma^2 (1 + \beta^2) \omega = \frac{1 + \beta^2}{1 - \beta^2} \omega.$$

El ángulo de reflexión  $\alpha$ , indicado también en la figura de arriba, está caracterizado por

$$\cos \alpha = \frac{2\beta}{1 + \beta^2}, \quad \sin \alpha = \frac{1}{\gamma^2 (1 + \beta^2)}.$$

En el sistema en que el espejo está en reposo el diagrama de luces y sombras es el siguiente:



Los puntos que marcan los límites de la zona de sombra en el sistema  $S'$  son

$$x'_1 = -(L + h) \cot \alpha', \quad x'_2 = -h \cot \alpha'.$$

A partir de las ecs. (4), resulta  $\cot \alpha' = \beta\gamma$ , y

$$x'_1 = -(L + h)\beta\gamma, \quad x'_2 = -h\beta\gamma.$$

En este sistema la longitud de la sombra es  $L\beta\gamma$ .

Lo más sencillo para obtener las coordenadas de los extremos de la sombra y de la región iluminada por el espejo en el sistema original es escribir las relaciones que llevan al sistema en reposo del espejo, y no al revés, como podría suponerse:

$$x'_i = \gamma(x_i - vt),$$

de donde se obtiene

$$x_i(t) = \frac{1}{\gamma}x'_i + vt.$$

Explícitamente,

$$x_1(t) = -(L + h)\beta + vt, \quad x_2(t) = -h\beta + vt.$$

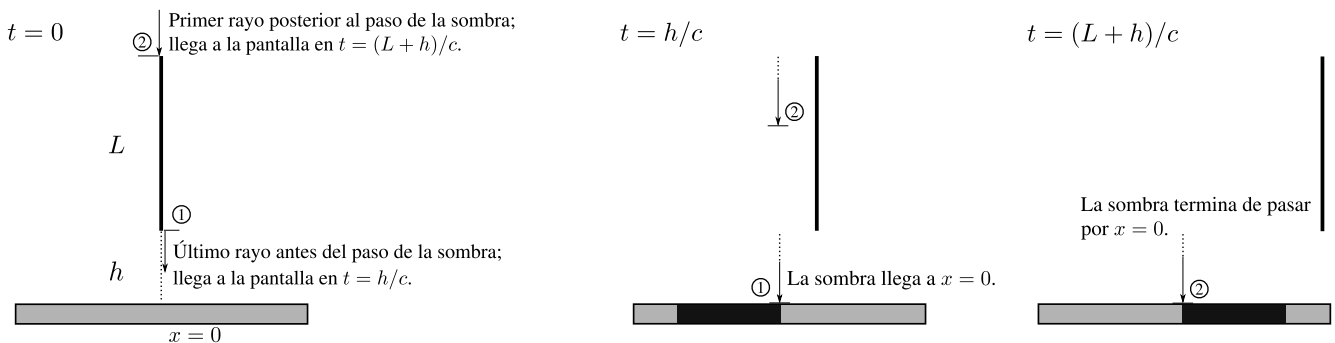
La longitud de la sombra termina siendo  $\beta L$ . Si se hubiera seguido el camino inverso, habríamos escrito las relaciones que llevan de  $S'$  a  $S$ ,

$$x_i = \gamma(x'_i + vt'), \quad t_i = \gamma\left(t' + \frac{v}{c^2}x'_i\right).$$

Despejando  $t'$  de la segunda relación y reemplazando en la primera se obtiene el resultado escrito más arriba.

Puede notarse que la posición  $x_i$  de cada extremo de la sombra, en el sistema original, se construye contrayendo cada distancia  $x'_i$  por un factor  $\gamma$  y agregando un desplazamiento  $vt$ . Es natural que así sea, porque en el sistema  $S'$  cada extremo de la sombra puede hacerse corresponder al extremo de una regla fija en  $S'$ . Luego sólo es cuestión de aplicar la contracción de Lorentz a estas reglas.

La posición de la sombra también puede obtenerse sin necesidad de aplicar las fórmulas de transformación relativistas. Consideremos el punto  $x = 0$  sobre la pantalla. Cuando el espejo pasa por  $x = 0$ , intercepta toda la luz en un segmento de longitud  $L$  a lo largo del espejo. El último rayo de luz, antes del paso de la sombra, llega al punto  $x = 0$  sobre la pantalla en  $t_1 = h/c$ , y la luz vuelve a llegar a este punto a tiempo  $t_2 = (L + h)/c$ . De manera que a la sombra le toma un tiempo  $t_2 - t_1 = L/c$  pasar por la posición  $x = 0$ . Como este punto no tiene nada de especial, lo mismo será válido para cualquier punto sobre la pantalla.



Es evidente que la sombra se mueve con la misma velocidad que el espejo. Por lo tanto, la sombra debe tener una longitud  $v(t_2 - t_1) = \beta L$ . Esto es todo lo que necesitamos para determinar la posición de la sombra



en función del tiempo. El punto más adelantado de la sombra pasa por  $x = 0$  en  $t_1 = h/c$ , y el punto más atrasado tiene que estar una distancia  $\beta L$  a la izquierda de él. Como los dos puntos se mueven a velocidad  $v$ , los límites de la sombra serán

$$x_2(t) = v(t - t_1) = vt - \beta h, \quad x_1(t) = x_2(t) - \beta L = vt - \beta(h + L).$$

Respecto de la región de la pantalla que recibe la luz reflejada por el espejo. En el sistema  $S'$  la mancha de luz está ubicada simétricamente respecto de la posición de la sombra. Entonces es fácil ver que lo mismo ocurrirá en el sistema original. Llamando  $X'_1$  y  $X'_2$  a los extremos en  $S'$  de la zona iluminada por la luz que refleja el espejo, será

$$X'_1 = (L + h) \cot \alpha', \quad X'_2 = h \cot \alpha'.$$

Pasando como antes al sistema original se encuentra

$$X_1(t) = vt + (L + h)\beta, \quad X_2 = vt + h\beta.$$

Este resultado también se puede obtener de manera más geométrica, análogamente a lo que se hizo antes para la sombra. Es necesario usar el resultado (5), que da la dirección de la onda reflejada en el sistema de laboratorio. Esto queda como ejercicio.

Para calcular el flujo de energía sobre la región de la pantalla que recibe la luz reflejada por el espejo, hay que considerar las dos ondas, la original y la reflejada.

Sobre la pantalla la onda original estará dada por los campos

$$\mathbf{E}(x, y, t) = E \cos(\omega t + \varphi) \hat{z}, \quad \mathbf{B}(x, y, t) = -E \cos(\omega t + \varphi) \hat{x},$$

donde  $\varphi$  es una fase constante para todos los puntos sobre la pantalla. Sin pérdida de generalidad, puede asumirse que  $E$  es real.

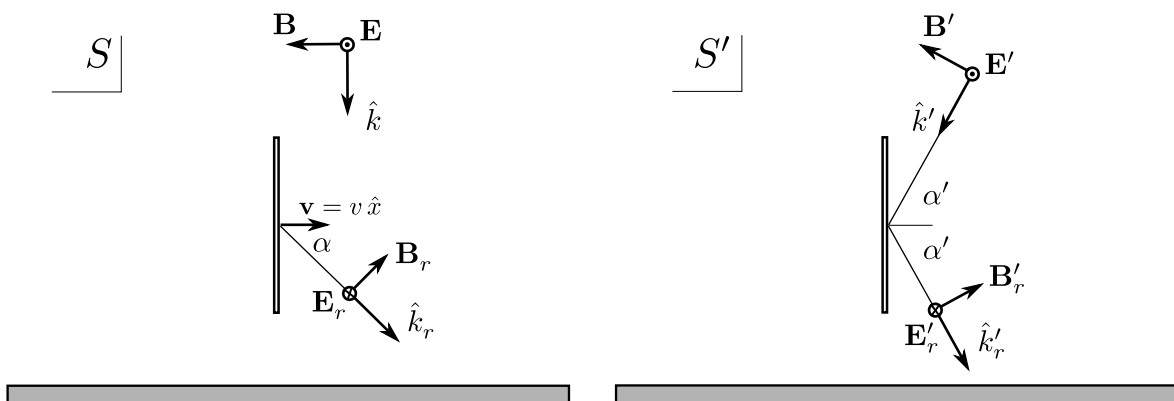
Por otro lado, sobre la pantalla la onda reflejada por el espejo tendrá asociados los siguientes campos

$$\mathbf{E}_r(x, y, t) = E_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_r t + \varphi_r) \hat{z},$$

$$\mathbf{B}_r(x, y, t) = -E_r \cos(\mathbf{k}_r \cdot \boldsymbol{\rho} - \omega_r t + \varphi_r) (\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{y}),$$

donde  $\boldsymbol{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ . La dirección de  $\mathbf{k}_r$ , la frecuencia  $\omega_r$  y el ángulo  $\alpha$  pueden leerse de la ec. (5). Veremos que no es necesario, para calcular la intensidad, conocer las fases  $\varphi$  y  $\varphi_r$ .

Para encontrar la amplitud  $E_r$  de la onda reflejada hay que pasar primero al sistema en reposo del espejo y luego volver al sistema original.



En el sistema en reposo del espejo, los campos eléctrico y magnético de la onda incidente están caracterizados por amplitudes

$$\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) = \gamma E \hat{z}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \gamma\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E} = (-\hat{x} + \gamma\beta\hat{y})E.$$

En el sistema  $S'$  los campos reflejados tienen amplitudes

$$\mathbf{E}'_r = -\mathbf{E}', \quad \mathbf{B}'_r = (\hat{x} + \gamma\beta\hat{y})E.$$

Transformando al sistema original se obtienen las amplitudes

$$\mathbf{E}_r = \gamma(\mathbf{E}'_r - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}'_r) = -\gamma^2(1 + \beta^2)E \hat{z},$$

$$\mathbf{B}_r = E \hat{x} + \gamma(\gamma\beta E \hat{y} - \boldsymbol{\beta} \times \gamma E \hat{z}) = (\hat{x} + 2\gamma^2\beta \hat{y})E.$$

Es fácil verificar que  $|\mathbf{E}_r| = |\mathbf{B}_r|$  y, más aún, que  $\mathbf{B}_r = \hat{k}_r \times \mathbf{E}_r$ .

Para calcular el flujo medio de energía por unidad de área hay que sumar los campos de las dos ondas, calcular la proyección del vector de Poynting en la dirección normal a la pantalla y tomar, finalmente, su valor medio:

$$F = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot (-\hat{y}),$$

donde

$$\mathbf{S}(x, y, t) = \frac{c}{4\pi} \left[ \mathbf{E}(x, y, t) + \mathbf{E}_r(x, y, t) \right] \times \left[ \mathbf{B}(x, y, t) + \mathbf{B}_r(x, y, t) \right].$$

Al calcular el valor medio temporal, todos los productos cruzados  $\mathbf{E} \times \mathbf{B}_r$  y  $\mathbf{E}_r \times \mathbf{B}$  promedian a cero, porque son el producto de funciones armónicas de distinta frecuencia. La onda original tiene frecuencia  $\omega$  y la reflejada,  $\omega_r$ . Al tomar el promedio de dos funciones armónicas de frecuencias diferentes queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T} \int_0^T dt \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(\omega_r t + \varphi_2) \\ &= \frac{1}{2T} \int_0^T dt \left\{ \cos [(\omega_r - \omega)t + (\varphi_2 - \varphi_1)] + \cos [(\omega + \omega_r)t + (\varphi_1 + \varphi_2)] \right\}. \end{aligned}$$

Cuando uno toma  $T \rightarrow \infty$ , si  $\omega \neq \omega_r$ , el resultado del promedio tiende a cero. La salvedad que podría hacerse aquí es que  $T$  no puede ser estrictamente infinito, pues la luz reflejada por el espejo sólo incide durante un tiempo  $L/c$  sobre cada punto de la pantalla. Lo importante es que durante ese tiempo la función  $\cos[(\omega_r - \omega)t]$  pueda dar un número grande de oscilaciones,

$$(\omega_r - \omega) \frac{L}{c} \gg 1.$$

Usando al valor de  $\omega_r$  obtenido más arriba, resulta

$$(\omega_r - \omega) \frac{L}{c} = 4\pi\beta^2\gamma \frac{L}{\lambda'},$$

donde  $\lambda'$  es la longitud de la onda incidente en el sistema en reposo del espejo. Esto está escrito así porque por hipótesis  $L$  debe ser mucho mayor que  $\lambda'$ , que es la condición necesaria para haber despreciado los efectos de borde por el tamaño finito del espejo en la dirección  $y$ . Entonces lo que tiene que ocurrir para que el promedio de la intensidad tenga algún sentido es que  $\beta^2\gamma$  sea mucho mayor que  $\lambda'/L$ , de por sí un número pequeño.

En definitiva, si el promedio de la intensidad asociado a los términos de interferencia de las dos ondas puede despreciarse,  $\langle \mathbf{S} \rangle$  será igual a la suma de los valores medios de los vectores de Poynting asociados a cada onda por separado,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi} [E^2 \hat{k} + E_r^2 \hat{k}_r].$$

Luego, teniendo en cuenta que  $\hat{k}_r \cdot \hat{y} = -1/[\gamma^2(1 + \beta^2)]$  y que  $E_r^2 = \gamma^4(1 + \beta^2)^2 E^2$ , resulta

$$F = \langle \mathbf{S} \rangle \cdot (-\hat{y}) = \frac{c}{8\pi} E^2 [1 + \gamma^2(1 + \beta^2)] = \frac{c}{4\pi} \gamma^2 E^2.$$