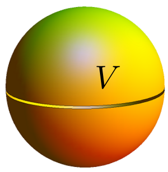
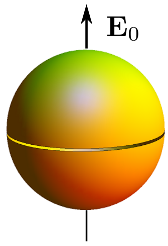
FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

Guía 4: Inducción, cuasiestacionario, conductores y teoremas de conservación

1. Una esfera conductora de radio a está a potencial V. Usando el tensor de Maxwell, calcular la fuerza que tiende a separar cualquier par de hemisferios. Comparar con el resultado obtenido integrando la fuerza de Lorentz. Si la esfera está aislada y tiene carga Q: sin hacer ningún otro cálculo, ¿cuál es la fuerza que tiende a separar sus hemisferios?



problema 1



problema 2

2. Una esfera conductora descargada tiene radio a y está en un campo eléctrico externo uniforme $\mathbf{E}_0$.

   (a) Calcular la fuerza que tiende a separar o a unir los hemisferios según la dirección de $\mathbf{E}_0$.

   (b) Calcular la fuerza si ahora la esfera tiene carga neta Q. ¿Puede obtenerse este resultado sumando a la fuerza obtenida en el ítem anterior la fuerza calculada en la segunda parte del problema 1?

3. Calcular la fuerza por unidad de área sobre la superficie de un solenoide infinito de sección arbitraria, con n vueltas por unidad de longitud y corriente I.

4. Encontrar el punto débil de una esfera con corriente superficial $\boldsymbol{\kappa}(\theta, \varphi) = \kappa_0 \sin\theta\, \hat{\varphi}(\varphi)$.

5. Una espira circular, que tiene radio a, resistencia R y coeficiente de autoinducción L, es perpendicular a un campo magnético uniforme. Para $t < 0$, el campo es constante y tiene módulo B_0. Si a partir de $t = 0$ el campo se apaga exponencialmente, $B(t) = B_0 e^{-t/\tau}$, calcular la corriente $I(t)$ inducida en la espira. En particular, analizar el caso en que $\tau_0 \ll \tau$, donde $\tau_0 = L/cR$.

6. Un solenoide infinito de radio a y n vueltas por unidad de longitud está recorrido por una corriente de la forma $I = I_0 \sin(\omega t)$. Calcular el campo electromagnético en todo el espacio utilizando la aproximación cuasiestacionaria.

7. Un capacitor está formado por dos placas circulares de radio a, separadas por una distancia h mucho menor que a. El capacitor está conectado a un circuito por el que circula una corriente $I = I_0 \sin(\omega t)$. Despreciando efectos de borde, calcular iterativamente los campos eléctrico y magnético dentro del capacitor haciendo un desarrollo en serie de potencias de ω. Identificar la función de Bessel a la que corresponde cada serie. Referencia: Feynman Vol. 2, sec. **23–2**.

8. Por un conductor cilíndrico, macizo, de radio a, $\mu = \varepsilon = 1$ y conductividad σ circula una corriente alterna del tipo $I = I_0 \cos(\omega t)$. Bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcule:

   (a) Los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en el interior del conductor.

   (b) La densidad de corriente $\mathbf{j}$ y el promedio temporal de la potencia por unidad de longitud disipada por efecto Joule.

(c) Estudie cualitativamente los casos límites de la distribución de $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ cuando $\delta/a \gg 1$ y $\delta/a \ll 1$, donde δ es el espesor pelicular o "skin depth". Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **60** [The skin effect] en la versión en inglés; sec. **46**, [Efecto pelicular] en la edición española de ed. Reverté.

9. Una cáscara esférica maciza tiene radio interior a y exterior b, y está caracterizada por una conductividad σ y una constante dieléctrica ε. Sobre la cara interior de la cáscara se ha depositado una densidad superficial de carga uniforme Σ. Si a $t = 0$ se permite que el sistema evolucione:

   (a) Usando argumentos de simetría, ¿cuánto vale $\mathbf{B}$ en todo el espacio y para todo t? ¿Qué simetría tiene el campo eléctrico?

   (b) Teniendo en cuenta lo anterior, encontrar la forma que adoptan las ecuaciones de Maxwell dentro y fuera del conductor.

   (c) Encontrar el campo eléctrico, la densidad de corriente y la densidad de carga (superficial y de volumen) en función del tiempo.

   (d) Encontrar la evolución de la energía de los campos en función del tiempo y demostrar que la variación de energía entre $t = 0$ y $t = \infty$ es igual a la energía disipada por efecto Joule.

10. *Corrientes de Foucault*: Una esfera de radio a y conductividad σ está inmersa en un campo magnético externo uniforme $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \mathbf{B}_0\, e^{-i\omega t}$. En los dos casos extremos, en que la longitud de penetración es mucho mayor o mucho menor que el radio de la esfera, y bajo la aproximación cuasiestacionaria, calcular la potencia que se disipa en la esfera como consecuencia de las corrientes de inducidas. Referencias: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **59** en la versión en inglés [Depth of penetration of a magnetic field into a conductor] o sec. **45** [Corrientes de Foucault] en la versión española, a partir de la ec. 45.12.

11. *Movimiento de un conductor en un campo magnético*: Una esfera de radio a y conductividad σ gira con velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$ en presencia de un campo magnético externo y estático, $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{x}$. El régimen es estacionario, $\omega a \ll c$ y $a \ll \delta$. Calcular los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ dentro del conductor. *Dos métodos*: i) resolver hasta orden ω las ecuaciones de Maxwell en el sistema del laboratorio, ii) pasar a un sistema que rota con la esfera, de tal modo que el problema se convierta en el de un conductor quieto en un campo externo variable (despreciando la excitación de corrientes por aceleración, que aparecen en el orden siguiente). Referencia: Landau y Lifshitz, *Electrodynamics of continuous media*, sec. **63** en la versión en inglés [Motion of a conductor in a magnetic field] o sec. **49** de la versión española; también, Panofsky y Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, sec. **9−3**.

12. *Inducción unipolar*: Una esfera conductora con magnetización uniforme $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$ gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{z}$. El movimiento es no relativista y la esfera es neutra. El régimen es estacionario y se asume que esta situación puede mantenerse indefinidamente sin que ningún agente fuerce la rotación de la esfera.

    (a) Como no hay disipación, no puede haber corrientes de conducción. Usando la ley de Ohm para el conductor en movimiento, demostrar que se induce una densidad de carga uniforme dentro de la esfera y encontrar su valor. (Despreciar el campo magnético asociado a las cargas inducidas.)

    (b) Puesto que la esfera es neutra, su momento monopolar debe ser nulo. Demostrar con argumentos de simetría que su momento dipolar también es nulo. Encontrar el campo eléctrico en todo el espacio y mostrar que es cuadrupolar.

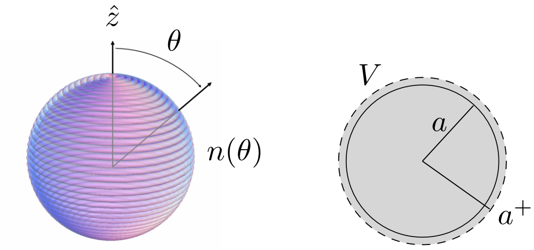
(c) Encontrar la densidad superficial de carga sobre la esfera.

(d) Calcular la fuerza electromotriz que se induce entre un polo de le esfera y su ecuador.

Referencia: Jackson, *Classical Electrodynamics*, 3ra. ed., problema 6.4.

13. Un capacitor de placas circulares paralelas se carga lentamente. Mostrar que el flujo del vector de Poynting a través de la superficie lateral es igual al incremento por unidad de tiempo de la energía almacenada. Despreciar efectos de borde. Referencia: Feynman Vol. 2, sec. **27−5**.

14. Una esfera magnetizable de radio a y permeabilidad μ está cubierta por un arrollamiento de cable que transporta una corriente constante I y que tiene $n(\theta)$ vueltas por unidad de longitud. La función $n(\theta)$ es tal que dentro de la esfera el campo magnético es uniforme, $\mathbf{B}_{\text{in}} = B_0\hat{z}$, y fuera es el campo de un dipolo m orientado en la dirección $\hat{z}$.



(a) ¿Cuál es la función $n(\theta)$? Tómese como dato $n(\pi/2) = n_0$.

(b) Escriba $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio en términos de n_0, I, μ y a. ¿Cuánto valen B_0 y m?

(c) Considere ahora que la corriente I es una función de t, cuyo tiempo característico de evolución es τ, es decir $\dot{I} \sim I/\tau$. ¿Qué condición debe satisfacer τ para que tenga sentido aplicar la aproximación cuasiestacionaria?

(d) Encuentre $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$ en la aproximación cuasiestacionaria.

(e) Verifique explícitamente que se cumple el teorema de Poynting hasta primer orden en $1/\tau$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \int_V dr^3\, \mathbf{E}\cdot\mathbf{J} = -\oint \frac{c}{4\pi}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\cdot\hat{n}\,da, \text{ con } \quad u = \int_V dr^3\, \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H}),$$

usando como volumen de integración el volumen V limitado por una esfera de radio a^+ apenas mayor que a.

15. Calcular el momento angular del campo electromagnético del sistema formado por dos cáscaras esféricas metálicas concéntricas, de radios a y b respectivamente, con carga $+q$ en la esfera interior y $-q$ en la exterior, y un dipolo magnético $\mathbf{m}$ en el centro de las esferas.