Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2015 – primer parcial (7/10)

■ **Problema 1**. Una carga puntual q está en el centro de un cubo conductor de lado a, centrado en el origen y con sus caras a tierra. Respetando la elección del origen y con los ejes como muestra la figura:

a) Encontrar el potencial electrostático $\Phi(x, y, z)$ en todo el espacio. (5 pts)

b) El potencial Φ es la suma del potencial de la carga en el origen, Φ_q, más el potencial de las cargas inducidas en el cubo, Φ_σ. En el exterior del cubo, ¿a qué sencilla función es igual $\Phi_\sigma(\mathbf{r})$? (2 pts)

c) Un cubo de lado a está centrado en el origen. ¿Qué distribución superficial de carga debe fijarse sobre sus caras para que el potencial en su exterior sea idéntico al de una carga q situada en el origen? (3 pts)

■ **Problema 2.** Una esfera dieléctrica de permitividad ϵ tiene radio a. A una distancia $r' > a$ del centro de la esfera hay una carga puntual q. Puede elegir el origen y los ejes que quiera. Encontrar:

a) el potencial electrostático en todo el espacio, (4 pts)

b) las distribuciones de carga de polarización en volumen y en superficie, (1 pt)

c) la carga y el momento dipolar totales inducidos en la esfera dieléctrica, (1 pt)

d) el potencial electrostático en todo el espacio en el límite en que $\epsilon \to \infty$. (1 pt)

e) En el límite en que $\epsilon \to \infty$, el potencial en el exterior de la esfera es equivalente al producido por unas pocas cargas puntuales. Identifique estas cargas y sus posiciones. (2 pts)

f) Encontrar la carga y el momento dipolar inducidos en la esfera dieléctrica cuando $\epsilon \to \infty$. (1 pt)

■ **Problema 3.** Un imán cilíndrico de radio R y altura L tiene densidad de magnetización $\mathbf{M}$ paralela a su eje. El imán tiene una cavidad cilíndrica de radio $r < R$ y altura $l < L$. El centro y el eje de la cavidad coinciden con el centro y el eje del imán. Dentro de la cavidad la densidad de magnetización es $\mathbf{M}_0$, paralela al eje del imán. Puede elegir el origen y los ejes que quiera.

a) Encontrar $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en todo el espacio. (Alcanza con dar los campos en términos de un potencial, vectorial o escalar. En tal caso, el potencial debe quedar escrito como un desarrollo o serie de funciones ortogonales en, al menos, una coordenada, y **no** como una integral de Poisson sin evaluar.) (4.5 pts)

b) Encontrar $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ en el centro del imán. (Aquí sí es necesario dar los campos, no en términos de series ni de integrales, ni de derivadas de un potencial, sino en una forma en que puedan evaluarse con una calculadora en un solo paso. Este ítem es mejor resolverlo independientemente del anterior.) (2.5 pts)

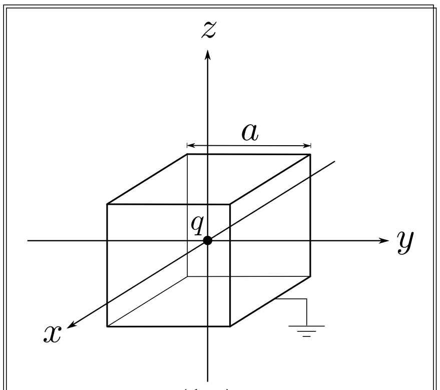
c) Calcular $\mathbf{B}$ en primera aproximación para distancias mucho mayores que las dimensiones del imán. (1.5 pts)

d) Dominada por el insensato afán de incrementar su campo magnético*, Susana Giménez (homónima de la popular conductora, pero sin ninguna relación) planea introducir de contrabando un pequeño imán, compuesto por un material con una densidad de magnetización formidable, M_0. Para evitar que este imán sea confiscado, decide disimularlo dentro de un imán ordinario, de magnetización $M = M_0/1000$. La geometría es la misma que la considerada en los ítems anteriores. ¿Qué condición debe cumplirse (en términos de las dimensiones R, L, r y l, y de la orientación relativa de $\mathbf{M}_0$ respecto de $\mathbf{M}$) para que el imán tenga baja probabilidad de ser detectado por los magnetómetros de la aduana? (1.5 pts)

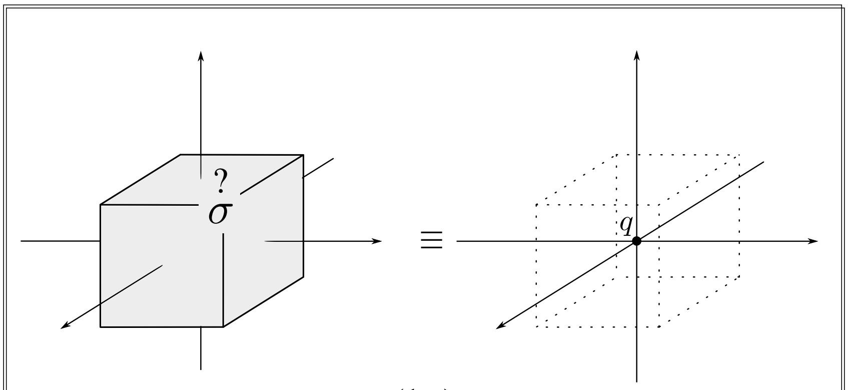
(Se aprueba con un mínimo de 15 puntos y dos problemas con un mínimo de 5.)

* `http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/2015/08/18/`

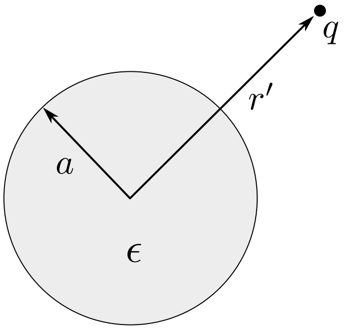
Figuras:



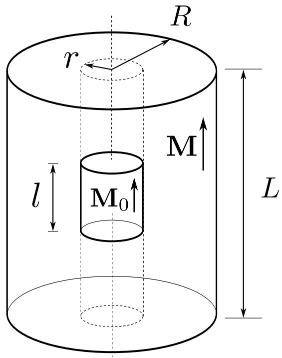
(1.a)



(1.c)



(2)



(3)

Fórmulas útiles:

- Dos representaciones de la delta de Dirac en una dimensión:

$$\delta(x-x') = \frac{2}{L}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{L}\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi x'}{L}\right] + \sin\left[\frac{2n\pi x}{L}\right]\sin\left[\frac{2n\pi x'}{L}\right]\right\}, \quad |x|, |x'| < \frac{L}{2},$$

$$\delta(x-x') = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left[\frac{n\pi x}{L}\right]\sin\left[\frac{n\pi x'}{L}\right], \quad 0 < x, x' < L.$$

- El potencial en esféricas de una carga q sobre el semieje z positivo, ubicada a una distancia r' del origen:

$$\Phi_q(r,\theta) = q\sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\theta)\frac{r_<^l}{r_>^{l+1}}.$$

- Una obviedad: si $l = 0$ y α es finito, entonces $l\alpha = 0$.
- Una relación de ortogonalidad para las funciones de Bessel J_ν: $\displaystyle\int_0^\infty d\rho\ \rho\ J_\nu(k\rho)J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k-k')}{k'}$.
- Una identidad: $I'_\nu(x)K_\nu(x) - I_\nu(x)K'_\nu(x) = x^{-1}$.
- Una primitiva: $\displaystyle\int dx\ xJ_0(x) = xJ_1(x)$.
- Un asunto de cuidado: $\sqrt{z^2} = |z|$.