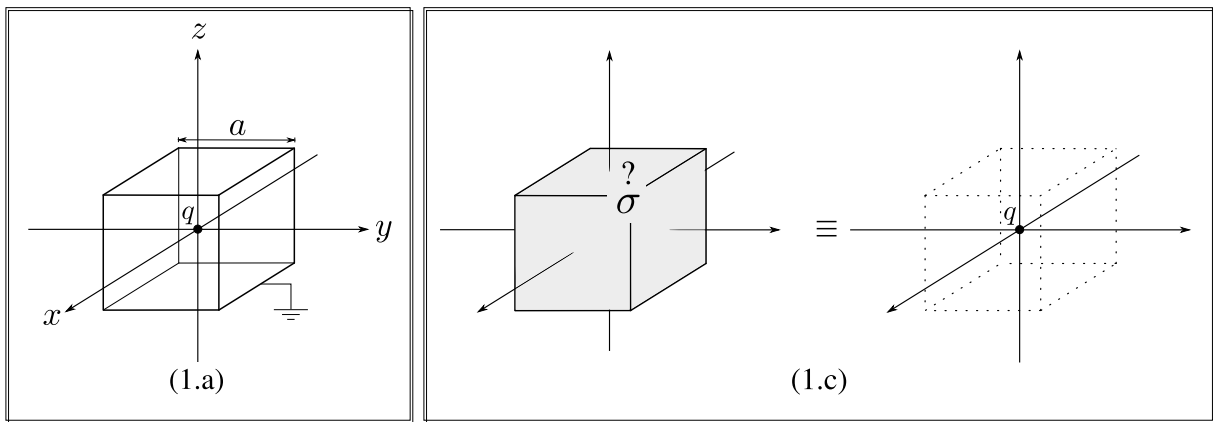


Física Teórica 1 – 2do. cuatrimestre de 2015 – primer parcial [con las soluciones]

■ **Problema 1.** Una carga puntual q está en el centro de un cubo conductor de lado a , centrado en el origen y con sus caras a tierra. Respetando la elección del origen y con los ejes como muestra la figura:

- a) Encontrar el potencial electrostático $\Phi(x, y, z)$ en todo el espacio. (5 pts)
- b) El potencial Φ es la suma del potencial de la carga en el origen, Φ_q , más el potencial de las cargas inducidas en el cubo, Φ_σ . En el exterior del cubo, ¿a qué sencilla función es igual $\Phi_\sigma(\mathbf{r})$? (2 pts)
- c) Un cubo de lado a está centrado en el origen. ¿Qué distribución superficial de carga debe fijarse sobre sus caras para que el potencial en su exterior sea idéntico al de una carga q situada en el origen? (3 pts)



Solución. a) En el exterior del cubo $\Phi = 0$. Para encontrar Φ en el interior, un método posible es separar en regiones con $z < 0$ y $z > 0$. La carga está en $z = 0$. En cada región el potencial satisface la ecuación de Laplace. A través de la superficie $z = 0$ habrá una condición de salto en la derivada normal de Φ . Puesto que en las dos regiones consideradas hay que anular el potencial en $x = \pm a/2$ y en $y = \pm a/2$, en esas direcciones habrá que elegir las constantes de separación de manera de tener senos y cosenos. Además, como la carga está en el centro del cubo, el potencial debe ser una función par según cada coordenada, de manera que sólo podrán aparecer cosenos en x e y . Los cosenos que se anulan en $x = \pm a/2$ son los que tienen un número impar de semilongitudes de onda. En efecto, debe ser

$$\cos\left(\frac{k_x a}{2}\right) = 0 \Rightarrow k_x = \frac{2n+1}{a} \pi. \quad (1)$$

Lo mismo vale en la dirección y . [Si hubiera que describir un potencial no necesariamente par, la base se completa con los senos de frecuencia par,

$$\sin\left(\frac{2n\pi x}{a}\right), \quad (2)$$

pero en este problema no es necesario.] Por otro lado, las funciones en la dirección z deben elegirse como senos o cosenos hiperbólicos que se anulen en las tapas $z = \pm a/2$, según la región. En la región que

corresponde a $z < 0$, habrá que elegir la función $\sinh k(a/2+z)$, y en la región con $z > 0$ será $\sinh k(a/2-z)$. Para abarcar los dos casos es suficiente escribir $\sinh k(a/2 - |z|)$. El potencial es entonces

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{n,m=0}^{\infty} A_{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \sinh \left[k_{nm} \left(\frac{a}{2} - |z| \right) \right], \quad (3)$$

donde

$$k_n = (2n + 1) \frac{\pi}{a}, \quad k_{nm} = \frac{\pi}{a} \sqrt{(2n + 1)^2 + (2m + 1)^2}. \quad (4)$$

Para usar la condición de salto, primero hay que escribir la densidad de carga sobre el plano $z = 0$, que es

$$\sigma(x, y) = q\delta(x)\delta(y). \quad (5)$$

Ahora deberíamos desarrollar esta función en la base (de las funciones pares) de cosenos en x e y que encontramos antes,

$$\sigma(x, y) = \sum_{nm} \sigma_{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y). \quad (6)$$

En la hoja de fórmulas figura el desarrollo de la delta de Dirac en el intervalo $\pm a/2$,

$$\delta(x - x') = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos \left[\frac{(2n + 1)\pi x}{L} \right] \cos \left[\frac{(2n + 1)\pi x'}{L} \right] + \sin \left[\frac{2n\pi x}{L} \right] \sin \left[\frac{2n\pi x'}{L} \right] \right\}, \quad |x|, |x'| < \frac{L}{2}. \quad (7)$$

Necesitamos usar este desarrollo cuando con $L = a$ y $x' = 0$,

$$\delta(x) = \frac{2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \left[\frac{(2n + 1)\pi x}{a} \right]. \quad (8)$$

Luego,

$$\sigma(x, y) = q \left(\frac{2}{a} \right)^2 \sum_{n,m=0}^{\infty} \cos \left[\frac{(2n + 1)\pi x}{a} \right] \cos \left[\frac{(2m + 1)\pi y}{a} \right]. \quad (9)$$

De aquí ya podemos leer que $\sigma_{nm} = 4q/a^2$.

Otro camino para encontrar σ_{nm} es notar que las funciones $\cos [(2n + 1)\pi x/a]$ deben formar una base ortogonal de las funciones pares en el intervalo entre $\pm a/2$. Es fácil intuir que son ortogonales. Lo único que necesitamos saber es cuál es la norma de estas funciones,

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \left[\cos \left(\frac{2n + 1}{a} \pi x \right) \right]^2 &= \frac{a}{(2n + 1)\pi} \int_{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} dx (\cos x)^2 \\ &= \frac{a}{(2n + 1)\pi} \left[\frac{x + \cos x \sin x}{2} \right]_{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}^{\frac{(2n+1)\pi}{2}} = \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Luego resulta

$$\begin{aligned}\sigma_{nm} &= \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy \sigma(x, y) \cos(k_n x) \cos(k_m y) \\ &= \left(\frac{2}{a}\right)^2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy q \delta(x) \delta(y) \cos(k_n x) \cos(k_m y) = \frac{4q}{a^2}.\end{aligned}\quad (11)$$

En conclusión, el término nm de la condición de salto se escribe como

$$2k_{nm} A_{nm} \cosh\left(\frac{k_{nm} a}{2}\right) = 4\pi \frac{4q}{a^2}.\quad (12)$$

Luego,

$$A_{nm} = \frac{8\pi q}{a^2 k_{nm} \cosh\left(\frac{k_{nm} a}{2}\right)} = \frac{8q}{a \sqrt{(2n+1)^2 + (2m+1)^2} \cosh\left(\frac{k_{nm} a}{2}\right)}.\quad (13)$$

La última expresión es sólo para mostrar que A_{nm} tiene las unidades correctas.

Un método alternativo para calcular el potencial hubiera sido usar el desarrollo más habitual en términos de $\sin n\pi x/a$ y $\sin n\pi y/a$ que se obtiene cuando el cubo se ubica dentro del octante $0 \leq x, y, z$ con uno de sus vértices en el origen. Al final de todo habría que hacer una traslación para dejar escrito el potencial según las coordenadas pedidas. Entonces, primero quedaría

$$\Phi(\mathbf{r}) = \sum_{nm} B_{nm} \sin(\kappa_n x) \sin(\kappa_m y) \frac{\sinh(\kappa_{nm} z_{<}) \sinh[\kappa_{nm}(a - z_{>})]}{\kappa_{nm} \sinh(\kappa_{nm} a)},\quad (14)$$

donde

$$\kappa_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \kappa_{nm} = \frac{\pi}{a} \sqrt{n^2 + m^2},\quad (15)$$

y la comparación que determina $z_{<}$ y $z_{>}$ es entre z y $a/2$. Esta forma del potencial ya es continua a través de $z = a/2$, y se han elegido las constantes de forma de simplificar cálculo del salto en la derivada respecto de z , lo que no es fundamental. La condición de salto implica

$$B_{nm} = 4\pi \sigma_{nm}.\quad (16)$$

Ahora la densidad de carga es $\sigma(x, y) = q\delta(x - a/2)\delta(y - a/2)$, y su desarrollo tiene coeficientes

$$\sigma_{nm} = \frac{4}{a^2} \int_0^a dx \int_0^a dy q \delta\left(x - \frac{a}{2}\right) \delta\left(y - \frac{a}{2}\right) \sin(\kappa_n x) \sin(\kappa_m y) = \frac{4q}{a^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{m\pi}{2}\right).\quad (17)$$

Así, los coeficientes σ_{nm} son cero a menos que n y m sean impares. Finalmente,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{16\pi q}{a^2} \sum'_{nm} (-1)^{n+m} \sin(\kappa_n x) \sin(\kappa_m y) \frac{\sinh(\kappa_{nm} z_{<}) \sinh[\kappa_{nm}(a - z_{>})]}{\kappa_{nm} \sinh(\kappa_{nm} a)}\quad (18)$$

donde la suma \sum' es sólo sobre los n y m impares mayores que cero. El mayor trabajo está ahora en desplazar esta solución para que el centro del cubo esté en el origen. Eso corresponde a sumar $a/2$ a cada coordenada. Para las funciones en x e y vale lo siguiente:

$$\sin \left[\kappa_n \left(x + \frac{a}{2} \right) \right] = \sin(\kappa_n x) \cos \left(\frac{\kappa_n a}{2} \right) + \cos(\kappa_n x) \sin \left(\frac{\kappa_n a}{2} \right) = (-1)^n \cos(\kappa_n x). \quad (19)$$

Aquí se tuvo en cuenta que n es impar. Para la función de z , conviene notar primero que cuando la carga está en $z = a/2$ es

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{\sinh(\kappa_{nm} z_{<}) \sinh[\kappa_{nm}(a - z_{>})]}{\kappa_{nm} \sinh(\kappa_{nm} a)} \\ &= \frac{\sinh \left(\frac{\kappa_{nm} a}{2} \right)}{\kappa_{nm} \sinh(\kappa_{nm} a)} \begin{cases} \sinh(\kappa_{nm} z) & \text{si } z < a/2, \\ \sinh[\kappa_{nm}(a - z)], & \text{si } z > a/2 \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\kappa_{nm} \cosh \left(\frac{\kappa_{nm} a}{2} \right)} \begin{cases} \sinh(\kappa_{nm} z) & \text{si } z < a/2, \\ \sinh[\kappa_{nm}(a - z)], & \text{si } z > a/2. \end{cases} \end{aligned} \quad (20)$$

Luego del corrimiento, resulta

$$Z \left(z + \frac{a}{2} \right) = \frac{\sinh \left[\kappa_{nm} \left(\frac{a}{2} - |z| \right) \right]}{2\kappa_{nm} \cosh \left(\frac{\kappa_{nm} a}{2} \right)}. \quad (21)$$

Reuniendo todas las partes, es fácil ver que se obtiene el potencial calculado inicialmente con el cubo centrado en el origen.

b) El potencial encontrado en el ítem anterior tiene dos contribuciones: i) la carga q en el origen, ii) la carga σ inducida en la superficie del cubo,

$$\Phi = \Phi_q + \Phi_\sigma. \quad (22)$$

Debido a que el potencial es cero fuera del cubo, el potencial producido por la distribución superficial de carga debe ser exactamente opuesto al producido por la carga q ,

$$\Phi_\sigma(\mathbf{r}) = -\Phi_q(\mathbf{r}) = -\frac{q}{r} \quad (\text{en el exterior del cubo}). \quad (23)$$

c) Viendo el resultado anterior, si uno quisiera generar en el exterior de un cubo el potencial que produciría una carga puntual en el origen, bastaría con fijar en la superficie del cubo una carga igual a $-\sigma$, donde σ es la distribución superficial de carga inducida cuando la carga q está en el centro del cubo a tierra. Debido a la simetría del problema alcanza con calcular σ sobre cualquiera de las caras. Según el modo en que hemos

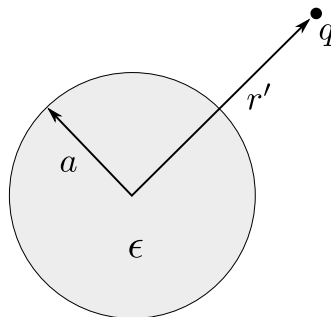
calculado el potencial, lo más práctico es calcular σ sobre $z = \pm a/2$. En particular, en $z = a/2$, resulta

$$\begin{aligned}\sigma(x, y) &= \frac{1}{4\pi} \sum_{nm} A_{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \sinh \left[k_{nm} \left(\frac{a}{2} - z \right) \right] \right\}_{z=a/2} \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{nm} k_{nm} A_{nm} \cos(k_n x) \cos(k_m y) \\ &= -\frac{2q}{a^2} \sum_{nm} \frac{\cos(k_n x) \cos(k_m y)}{\cosh(k_{nm} a/2)}\end{aligned}\quad (24)$$

Resumiendo, si en cada una de las caras de un cubo de lado $a/2$ centrado en el origen se fija una densidad de carga $-\sigma(x_i, x_j)$, en las variables adecuadas a cada cara, el potencial en el exterior del cubo será idéntico al de una carga puntual en el origen.

■ **Problema 2.** Una esfera dieléctrica de permitividad ϵ tiene radio a . A una distancia $r' > a$ del centro de la esfera hay una carga puntual q . Puede elegir el origen y los ejes que quiera. Encontrar:

- el potencial electrostático en todo el espacio, (4 pts)
- las distribuciones de carga de polarización en volumen y en superficie, (1 pt)
- la carga y el momento dipolar totales inducidos en la esfera dieléctrica, (1 pt)
- el potencial electrostático en todo el espacio en el límite en que $\epsilon \rightarrow \infty$. (1 pt)
- En el límite en que $\epsilon \rightarrow \infty$, el potencial en el exterior de la esfera es equivalente al producido por unas pocas cargas puntuales. Identifique estas cargas y sus posiciones. (2 pts)
- Encontrar la carga y el momento dipolar inducidos en la esfera dieléctrica cuando $\epsilon \rightarrow \infty$. (1 pt)



Solución. a) La elección más sencilla de coordenadas es con el origen en el centro de la esfera y la carga en $z = r'$. Buscaremos un potencial para el campo eléctrico \mathbf{E} . El potencial se escribirá como la suma de dos contribuciones: i) el potencial de la carga, ii) el potencial de una cáscara esférica de carga inducida en la superficie $r = a$. Esas son las únicas cargas de polarización que puede haber. Entonces,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_q(\mathbf{r}) + \Phi_P(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[\frac{r^l}{r^{l+1}} \right]_{r'} + \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) A_l \left[\frac{r^l}{r^{l+1}} \right]_a. \quad (25)$$

El subíndice en cada corchete señala el radio al que se refiere la comparación que define $r_<$ y $r_>$. En el caso de la carga es r' , y en el caso de la cáscara es $r = a$. Lo único que hay que determinar son los coeficientes A_l , que se obtienen a partir del salto (en este caso es continuidad) de \mathbf{D} en $r = a$. Esto es

$$\begin{aligned} & \left[\mathbf{D}(a^+, \theta) - \mathbf{D}(a^-, \theta) \right] \cdot \mathbf{r} = 0, \\ & \rightarrow \epsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{a^-} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{a^+} = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Al hacer las derivadas conviene tener presente que el potencial de la carga tiene la misma forma a través de la superficie $r = a$, y que el potencial de la cáscara tiene un salto en su derivada. La componente l -ésima de la condición (26) se lee como

$$q(\epsilon - 1) \frac{la^{l-1}}{r'^{l+1}} - \frac{A_l}{a^2} (l\epsilon + l + 1) = 0. \quad (27)$$

De aquí resulta

$$A_l = -\frac{q(\epsilon - 1)l}{l\epsilon + l + 1} \left(\frac{a}{r'} \right)^{l+1}. \quad (28)$$

Otro método para llegar a este resultado hubiera sido separar en tres regiones y usar condiciones de salto y continuidad en las interfaces. Los cálculos siguen siendo triviales, pero como hay que resolver más ecuaciones aumenta la probabilidad de cometer errores.

b) Respecto a la carga de polarización, debido a que no hay carga libre en el volumen es $\rho_P = 0$ dentro de la esfera. Por otro lado, puesto que en $r = a$ no hay carga libre, todo el salto de la componente normal del campo eléctrico es carga de polarización superficial. La única contribución a ese salto viene del potencial de la propia cáscara, ya que el de la carga es continuo y derivable a través de $r = a$. En la superficie de la esfera dieléctrica es entonces

$$4\pi\sigma_P(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{(2l+1)A_l}{a^2}. \quad (29)$$

c) La carga y el momento dipolar inducidos pueden leerse directamente de la parte del potencial originado en las cargas de polarización,

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) A_l \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right]_a, \quad (30)$$

considerando $r > a$. (Alternativamente, podrían calcularse los momentos de σ_P , pero ese camino es menos directo.) La forma genérica de un potencial con simetría azimutal es

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r} + \frac{p \cos \theta}{r^2} + \dots \quad (31)$$

Comparando con la expresión de Φ_P para $r > a$,

$$\Phi_P(\mathbf{r}) = \frac{A_0}{r} + \frac{aA_1 \cos \theta}{r^2} + \dots, \quad (32)$$

vemos que $Q_P = A_0$ y que $p_P = A_1 a$. Algo que podía preverse sin hacer ningún cálculo es que Q_P tiene que ser cero, ya que ese es un resultado general cuando se considera todo el volumen ocupado por un dieléctrico que no contiene cargas libres. En definitiva, obtenemos que $Q_P = 0$ y que

$$p_P = -qa \left(\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} \right) \left(\frac{a}{r'} \right)^2. \quad (33)$$

d) Cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ los coeficientes A_l asumen la siguiente forma

$$A_0 = 0, \quad A_l = -q \left(\frac{a}{r'} \right)^{l+1} \quad \text{si } l > 0. \quad (34)$$

La expresión del potencial total cuando $\epsilon \rightarrow \infty$ es

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right]_{r'} - q \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left(\frac{a}{r'} \right)^{l+1} \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right]_a. \quad (35)$$

Notar que la segunda suma empieza en $l = 1$. Para $r \geq a$ es

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} \right]_{r'} - q \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{a^{(2l+1)}}{(rr')^{l+1}}, \quad r \geq a, \quad (36)$$

y para $r \leq a < r'$

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r^l}{r'^{l+1}} - q \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r^l}{r'^{l+1}} = \frac{q}{r'}. \quad (37)$$

Dentro de la esfera dieléctrica, en el límite en que $\epsilon \rightarrow \infty$, el potencial es constante e igual al de una cáscara conductora con una carga q/r' distribuida uniformemente en su superficie. El campo eléctrico dentro de la esfera es nulo en este límite.

e) Sabemos que en el límite $\epsilon \rightarrow \infty$ la esfera dieléctrica debería comportarse como una esfera conductora.

Evaluemos el potencial en $r \geq a$,

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r^l}{r'^{l+1}} - q \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{a^{(2l+1)}}{(rr')^{l+1}}. \quad (38)$$

Aquí la única comparación relevante entre radios es respecto de r' . Si la segunda suma empezara en $l = 0$, es evidente que obtendríamos el potencial de una carga frente una esfera conductora a tierra. Podemos sumar y restar el término que correspondería a $l = 0$, y combinar las dos sumatorias. Resulta así

$$\Phi(\mathbf{r}) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \left[\frac{r^l}{r'^{l+1}} - \frac{a^{(2l+1)}}{(rr')^{l+1}} \right] + \frac{1}{r} \left(\frac{aq}{r'} \right). \quad (39)$$

El primer término corresponde a la carga puntual y a su imagen por una esfera a tierra de radio a . El segundo término es una carga puntual de valor qa/r' en el origen. Este segundo término aporta la carga necesaria para mantener la esfera dieléctrica sin carga neta. Notar que es igual en módulo pero opuesto en signo al valor de la carga imagen de q por la esfera, $q' = -(a/r')q$.

f) Antes vimos que $Q_P = A_0 = 0$ necesariamente. Ese resultado no dependía del valor de ϵ , y vemos que sigue manteniéndose. La forma límite del momento dipolar inducido en la esfera, $p_P = A_1 a$, es

$$p_P = -qa \left(\frac{a}{r'} \right)^2. \quad (40)$$

Podemos verificar que esto corresponde al momento dipolar de la carga imagen de q respecto de la esfera. En efecto,

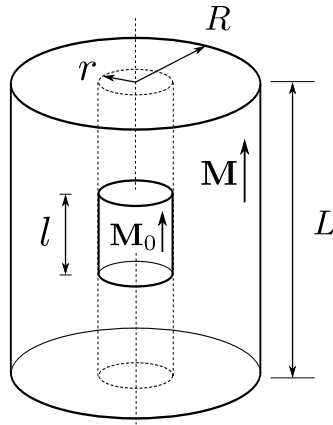
$$-q \frac{a}{r'} \times \frac{a^2}{r'} = -qa \left(\frac{a}{r'} \right)^2. \quad (41)$$

La otra carga *imagen* dentro de la esfera, al estar ubicada en el origen, no contribuye al momento dipolar.

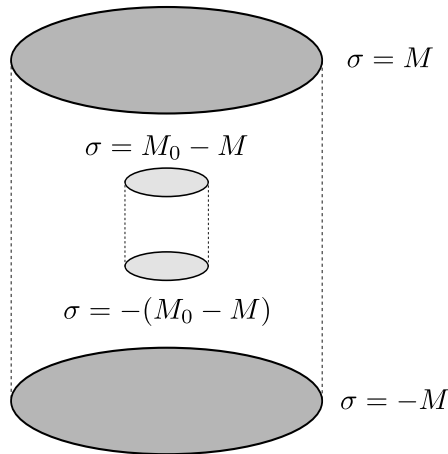
■ **Problema 3.** Un imán cilíndrico de radio R y altura L tiene densidad de magnetización \mathbf{M} paralela a su eje. El imán tiene una cavidad cilíndrica de radio $r < R$ y altura $l < L$. El centro y el eje de la cavidad coinciden con el centro y el eje del imán. Dentro de la cavidad la densidad de magnetización es \mathbf{M}_0 , paralela al eje del imán. Puede elegir el origen y los ejes que quiera.

- Encontrar \mathbf{B} y \mathbf{H} en todo el espacio. (Alcanza con dar los campos en términos de un potencial, vectorial o escalar. En tal caso, el potencial debe quedar escrito como un desarrollo o serie de funciones ortogonales en, al menos, una coordenada, y **no** como una integral de Poisson sin evaluar.) (4.5 pts)
- Encontrar \mathbf{B} y \mathbf{H} en el centro del imán. (Aquí sí es necesario dar los campos, no en términos de series ni de integrales, ni de derivadas de un potencial, sino en una forma en que puedan evaluarse con una calculadora en un solo paso. Este ítem es mejor resolverlo independientemente del anterior.) (2.5 pts)
- Calcular \mathbf{B} en primera aproximación para distancias mucho mayores que las dimensiones del imán. (1.5 pts)
- Dominada por el insensato afán de incrementar su campo magnético*, Susana Giménez (homónima de la popular conductora, pero sin ninguna relación) planea introducir de contrabando un pequeño imán, compuesto por un material con una densidad de magnetización formidable, M_0 . Para evitar que este imán sea confiscado, decide disimularlo dentro de un imán ordinario, de magnetización $M = M_0/1000$. La geometría es la misma que la considerada en los ítems anteriores. ¿Qué condición debe cumplirse (en términos de las dimensiones R, L, r y l , y de la orientación relativa de \mathbf{M}_0 respecto de \mathbf{M}) para que el imán tenga baja probabilidad de ser detectado por los magnetómetros de la aduana? (1.5 pts)

* <http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/2015/08/18/>



Solución. a) Resulta natural elegir el eje del imán según la dirección z y el origen de coordenadas en su centro. Desde el punto de vista del campo \mathbf{H} , como no hay corrientes libres es $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_H$. Las fuentes de Φ_H son distribuciones de carga magnética puramente superficiales, dadas por la fórmula general $\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}_{12}$. A uno y otro lado de las interfases con ρ constante, donde $\mathbf{n} = \hat{\rho}$, la magnetización es perpendicular a \mathbf{n} , de modo que allí la densidad de carga es cero. Sólo puede haber carga magnética en las interfases con z constante, es decir, en los discos de radios R y r , respectivamente, ubicados $z = \pm L/2$ y en $z = \pm l/2$. La figura muestra cuáles son las densidades sobre esos discos.



El potencial Φ_H será entonces la suma de cuatro contribuciones, todas con la forma genérica del potencial producido por un disco con densidad de carga uniforme. Alcanzará con resolver el potencial de un disco de radio a sobre el plano $z = 0$, centrado en el origen y con densidad σ . La superposición adecuada se obtendrá combinando varios de estos potenciales previa cierta traslación según la dirección z .

Debido a la simetría de rotación, el potencial de un disco sobre el plano $z = 0$, centrado en el origen, puede desarrollarse como una integral de Fourier con las funciones de Bessel J_0 ,

$$\Phi(\mathbf{r}) = \int_0^\infty dk J_0(k\rho) e^{-k|z|} A(k). \quad (42)$$

Esto corresponde a dividir el espacio en dos regiones, en las cuales vale la ecuación de Laplace, según z sea mayor o menor que cero. La elección de la función $e^{-k|z|}$ asegura la continuidad en el plano $z = 0$ y las

condiciones de regularidad para $|z| \rightarrow \infty$. Para determinar la función $A(k)$ hay que plantear la condición de salto en $z = 0$. Eso da

$$\int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) 2kA(k) = 4\pi\sigma(\rho). \quad (43)$$

La densidad σ debe escribirse según la misma base,

$$\sigma(\rho) = \int_0^{\infty} dk J_0(k\rho) \hat{\sigma}(k). \quad (44)$$

Luego será

$$2kA(k) = 4\pi\hat{\sigma}(k). \quad (45)$$

Utilizando la representación de la delta de Dirac

$$\frac{\delta(k - k')}{k'} = \int_0^{\infty} d\rho \rho J_0(k\rho) J_0(k'\rho), \quad (46)$$

se deduce que

$$\hat{\sigma}(k) = k \int_0^{\infty} d\rho \rho \sigma(\rho) J_0(k\rho). \quad (47)$$

Para el caso de un disco de radio a , es

$$\hat{\sigma}(k) = k\sigma \int_0^a d\rho \rho J_0(k\rho) = a\sigma J_1(ka). \quad (48)$$

La condición de salto implica

$$2kA(k) = 4\pi a\sigma J_1(ka) \rightarrow A(k) = 2\pi\sigma \frac{J_1(ka)}{k}. \quad (49)$$

Finalmente,

$$\Phi(\rho, z) = 2\pi a\sigma \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(k\rho) J_1(ka) e^{-k|z|}. \quad (50)$$

Debido a que el potencial Φ_H se construirá como la suma de cuatro de estos potenciales, trasladados según z , y con distintos valores de σ y de a , conviene escribir $\Phi(\rho, z) = \sigma\Phi_a(\rho, z)$, donde

$$\Phi_a(\rho, z) = 2\pi a \int_0^{\infty} \frac{dk}{k} J_0(k\rho) J_1(ka) e^{-k|z|}. \quad (51)$$

Luego, teniendo en cuenta los cuatro discos cargados, con sus radios, alturas y densidades particulares, resulta

$$\Phi_H(\rho, z) = M \left[\Phi_R \left(\rho, z - \frac{L}{2} \right) - \Phi_R \left(\rho, z + \frac{L}{2} \right) \right] + (M_0 - M) \left[\Phi_r \left(\rho, z - \frac{l}{2} \right) - \Phi_r \left(\rho, z + \frac{l}{2} \right) \right]. \quad (52)$$

Aquí se hace evidente que el imán compuesto puede pensarse como la superposición de dos imanes macizos, uno con magnetización \mathbf{M} y otro con magnetización $\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}$. Para terminar, según dijimos al comienzo, el campo \mathbf{H} es $-\nabla\Phi_H$. El campo \mathbf{B} es igual a \mathbf{H} fuera del imán, $\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}_0$ dentro de la cavidad, y $\mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ dentro del imán pero fuera de la cavidad.

b) Para encontrar los campos en el centro del imán, conviene directamente calcular la integral de Poisson para $\Phi_H(\rho, z)$. A todos los fines prácticos \mathbf{H} coincide con el campo eléctrico de un conjunto de discos cargados, paralelos y alineados según el eje z . Por simetría de rotación, sobre el eje z debe ser

$$\mathbf{H}(0, z) = H(z)\hat{z} = -\frac{\partial\Phi_H(0, z)}{\partial z}\hat{z}. \quad (53)$$

En definitiva, hay que calcular Φ_H sobre el eje z y tomar el gradiente. Para hacer esto, volvemos de nuevo a la construcción en términos de discos cargados. El potencial de un disco de radio a , ubicado sobre el plano $z = 0$ y con densidad superficial σ es, para puntos del eje z ,

$$\Phi(0, z) = 2\pi\sigma \int_0^a \frac{d\rho \rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = 2\pi\sigma \left[\sqrt{z^2 + a^2} - |z| \right]. \quad (54)$$

A partir de aquí resulta

$$-\frac{\partial\Phi(0, z)}{\partial z} = -2\pi\sigma \left[\frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \text{sgn}(z) \right]. \quad (55)$$

De manera alternativa, podríamos haber calculado directamente el campo eléctrico asociado a σ en este problema equivalente. Puesto que sabemos que sólo tendrá componente z , alcanza con plantear la integral para esa componente

$$\mathbf{E}(0, z) = 2\pi\sigma \int_0^a d\rho \rho \frac{z\hat{z}}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}} = -2\pi\sigma z \left(\frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} - \frac{1}{|z|} \right), \quad (56)$$

lo que coincide con el primer resultado, ec. (55).

Combinando cuatro de estos campos, con la densidad σ adecuada y desplazados en el eje z , sobre el eje del imán será

$$\begin{aligned} H(z) = 2\pi M \left\{ \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - z)^2 + R^2}} - \text{sgn}\left(\frac{L}{2} - z\right) \right] + \left[\frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + z)^2 + R^2}} - \text{sgn}\left(\frac{L}{2} + z\right) \right] \right\} \\ + 2\pi(M_0 - M) \left\{ \left[\frac{\frac{l}{2} - z}{\sqrt{(\frac{l}{2} - z)^2 + r^2}} - \text{sgn}\left(\frac{l}{2} - z\right) \right] + \left[\frac{\frac{l}{2} + z}{\sqrt{(\frac{l}{2} + z)^2 + r^2}} - \text{sgn}\left(\frac{l}{2} + z\right) \right] \right\}. \quad (57) \end{aligned}$$

Los dos primeros términos representan la contribución de un imán macizo de longitud L y radio R , con magnetización uniforme \mathbf{M} . Los últimos dos términos, representan la contribución de un imán macizo de longitud l y radio r , con magnetización $\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}$.

A modo de comparación con resultados de la Guía 1, si evaluamos la primera contribución, obtenemos que el campo H_M producido por el imán macizo de magnetización \mathbf{M} es

$$H_M(z) = 2\pi M \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - z)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + z)^2 + R^2}} \right] - 4\pi M \Theta(\frac{L}{2} - |z|). \quad (58)$$

El último término es $-4\pi M$ dentro del imán y cero fuera. A su vez, el campo magnético es $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$ dentro del imán e igual a \mathbf{H} fuera, de modo que la contribución al campo magnético que produce el imán macizo de magnetización \mathbf{M} sobre puntos de su eje, tanto fuera como dentro del imán, es

$$B_M(z) = 2\pi M \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - z)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + z)^2 + R^2}} \right]. \quad (59)$$

Esto debe compararse con el resultado que aparece en la Guía 1, problema 7, que da sobre el eje de un solenoide un campo en z de valor

$$B_S(z) = \frac{2\pi nI}{c} (\cos \theta_1 + \cos \theta_2) = \frac{2\pi nI}{c} \left[\frac{\frac{L}{2} - z}{\sqrt{(\frac{L}{2} - z)^2 + R^2}} + \frac{\frac{L}{2} + z}{\sqrt{(\frac{L}{2} + z)^2 + R^2}} \right]. \quad (60)$$

Vemos entonces que el campo del imán cilíndrico es equivalente al de un solenoide, siempre que identifiquemos cM con nI , lo que está bien, puesto que la densidad de corriente superficial de magnetización del imán es cM y la del solenoide es nI .

Hecho este comentario, volvamos al problema del parcial. En el centro del imán $z = 0$ y a partir de (57) queda

$$H(0) = 4\pi M \left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} - 1 \right] + 4\pi(M_0 - M) \left[\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}} - 1 \right]. \quad (61)$$

Para obtener \mathbf{B} en el centro del imán hay que tener en cuenta que allí la densidad de magnetización es \mathbf{M}_0 , de modo que $\mathbf{B}(0, 0) = \mathbf{H}(0, 0) + 4\pi\mathbf{M}_0$. Luego, $\mathbf{B}(0, 0) = B_0\hat{z}$, donde

$$B_0 = 4\pi M \left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} \right] + 4\pi(M_0 - M) \left[\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}} \right]. \quad (62)$$

Esta manera de escribir \mathbf{B} pone de manifiesto que el problema puede pensarse como la superposición de dos imanes macizos. Podemos verificar esto calculando el campo total como la suma de dos contribuciones de imanes macizos de magnetizaciones \mathbf{M} y $\mathbf{M}_0 - \mathbf{M}$. En tal caso el campo magnético en el centro del imán compuesto sería

$$B_0 = \left\{ 4\pi M \left[\frac{L/2}{\sqrt{(L/2)^2 + R^2}} - 1 \right] + 4\pi M \right\} + \left\{ 4\pi(M_0 - M) \left[\frac{l/2}{\sqrt{(l/2)^2 + r^2}} - 1 \right] + 4\pi(M_0 - M) \right\}. \quad (63)$$

Para cada imán sumamos 4π por el valor de su respectiva magnetización. Es fácil ver que queda lo mismo que antes, porque es como sumar a la expresión total una cantidad igual a $4\pi M + 4\pi(M_0 - M) = 4\pi M_0$. Se termina sumando sólo la magnetización que hay dentro de la cavidad.

Otro camino, acaso más directo, para obtener \mathbf{B} y \mathbf{H} en el centro del imán es a partir de la integral de Biot–Savart para \mathbf{B} . Las fuentes en este caso son las corrientes superficiales de magnetización, $cM \hat{\phi}$ sobre la superficie lateral exterior, y $c(M_0 - M) \hat{\phi}$ sobre la superficie lateral de la cavidad. Es decir, basta con calcular el campo magnético en el centro de un solenoide y superponer dos de estas contribuciones. El problema es sencillo porque la simetría implica que el campo estará según el eje z . Para un solenoide de longitud L y radio R , con densidad superficial de corriente $\kappa \hat{\phi}(\phi)$, el campo sobre su eje es

$$\mathbf{B}(0, z) = \frac{1}{c} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \int_0^{2\pi} R d\phi' \frac{\kappa \hat{\phi}(\phi') \times [(z - z')\hat{z} - R\hat{\rho}(\phi')]}{[(z' - z)^2 + R^2]^{3/2}}. \quad (64)$$

Las integrales para las componentes x e y deberían ser cero por simetría. Eso puede verificarse aparte. Lo que nos interesa es la integral para la componente z . Escribiendo $\mathbf{B}(0, z) = B(z) \hat{z}$, resulta

$$B(z) = \frac{1}{c} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz' \int_0^{2\pi} R d\phi' \frac{R\kappa}{[(z' - z)^2 + R^2]^{3/2}} = \frac{2\pi\kappa}{c} \frac{z' - z}{\sqrt{(z' - z)^2 + R^2}} \Big|_{-L/2}^{L/2}. \quad (65)$$

Esto reproduce el resultado (59) con $\kappa = cM$. En el centro de un imán macizo de magnetización M , altura L y radio r quedaría

$$B(0) = 4\pi M \frac{L/2}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + R^2}}. \quad (66)$$

El imán verdadero es la superposición de dos imanes, como ya se ha dicho. En el centro común de esos imanes resulta para B_0 el mismo valor que se calculó más arriba en la ec. (62),

$$B_0 = 4\pi M \frac{L/2}{\sqrt{(\frac{L}{2})^2 + R^2}} + 4\pi(M_0 - M) \frac{l/2}{\sqrt{(\frac{l}{2})^2 + R^2}}. \quad (67)$$

El segundo término tiene su origen en la corriente de magnetización en la interfase entre los dos imanes, $\kappa = c(M_0 - M)$.

c) En primera aproximación, fuera del imán el campo magnético es dipolar. Para escribir este campo sólo necesitamos saber el momento dipolar total, \mathbf{m} , del imán. Conocemos las densidades de magnetización, de modo que

$$\mathbf{m} = (\pi R^2 L - \pi r^2 l) \mathbf{M} + \pi r^2 l \mathbf{M}_0. \quad (68)$$

Aquí tenemos en cuenta que el volumen ocupado por la magnetización \mathbf{M} es igual al volumen total menos el de la cavidad. Luego, tomando como origen el centro del imán, el campo dipolar fuera del imán es

$$\mathbf{B}_{\text{dip}}(\mathbf{r}) = \frac{3(\hat{r} \cdot \mathbf{m})\hat{r} - \mathbf{m}}{r^3}. \quad (69)$$

d) Fuera del imán, la mayor contribución al campo magnético viene del término dipolar. Para minimizar este campo hay que minimizar el módulo de \mathbf{m} . Eso se consigue eligiendo \mathbf{M}_0 antiparalela a \mathbf{M} y ajustando los volúmenes de cada cilindro de modo que m sea cero. Esto es

$$m = \pi(R^2L - r^2l)M - \pi r^2lM_0 = (V_1 - V_2)M - V_2M_0 = 0, \quad (70)$$

donde V_1 es el volumen del cilindro de radio R y largo L y V_2 es el volumen de la cavidad. Si $M_0 = 10^3 M$, debe ser

$$V_1 = 1001 V_2 \approx 1000 V_2. \quad (71)$$

Una posibilidad es elegir $R = 10r$ y $L = 10l$, es decir, un cilindro 10 veces más grande que el que se quiere disimular.

Fórmulas que aparecían en la hoja del parcial:

- Dos representaciones de la delta de Dirac en una dimensión:

$$\delta(x - x') = \frac{2}{L} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \cos \left[\frac{(2n+1)\pi x}{L} \right] \cos \left[\frac{(2n+1)\pi x'}{L} \right] + \sin \left[\frac{2n\pi x}{L} \right] \sin \left[\frac{2n\pi x'}{L} \right] \right\}, \quad |x|, |x'| < \frac{L}{2},$$

$$\delta(x - x') = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left[\frac{n\pi x}{L} \right] \sin \left[\frac{n\pi x'}{L} \right], \quad 0 < x, x' < L.$$

- El potencial en esféricas de una carga q sobre el semieje z positivo, ubicada a una distancia r' del origen:

$$\Phi_q(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \theta) \frac{r^l}{r'^{l+1}}.$$

- Una obviedad: si $l = 0$ y α es finito, entonces $l\alpha = 0$.

- Una relación de ortogonalidad para las funciones de Bessel J_ν : $\int_0^\infty d\rho \rho J_\nu(k\rho) J_\nu(k'\rho) = \frac{\delta(k - k')}{k'}$.

- Una identidad: $I'_\nu(x)K_\nu(x) - I_\nu(x)K'_\nu(x) = x^{-1}$.

- Una primitiva: $\int dx x J_0(x) = x J_1(x)$.

- Un asunto de cuidado: $\sqrt{z^2} = |z|$.