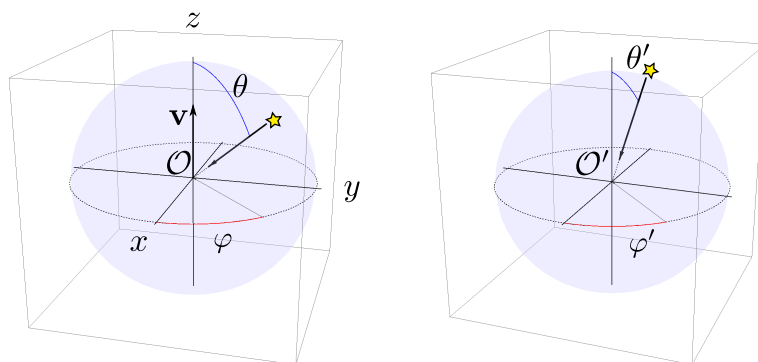


# FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre 2015

## Guía 6: Óptica relativista

1. (El cielo relativista.) El observador  $\mathcal{O}'$  se mueve con velocidad relativa  $v$  respecto de  $\mathcal{O}$ . En cierto instante, los dos observadores coinciden en el mismo punto del espacio. En ese momento, los dos reciben luz proveniente de una misma estrella muy lejana. Ambos observadores eligen su eje  $z$  en la dirección de  $v$ , de modo que escribirán el vector de la velocidad de la luz recibida según expresiones análogas; el observador  $\mathcal{O}$ , por ejemplo, escribirá  $\mathbf{c}_{\mathcal{O}} = -(c \cos \theta \sin \theta \hat{x} + c \sin \theta \sin \theta \hat{y} + c \cos \theta \hat{z})$ . Obviamente,  $|\mathbf{c}_{\mathcal{O}}| = |\mathbf{c}_{\mathcal{O}'}| = c$ .



- (a) Si  $\mathcal{O}$  recibe la luz según la dirección definida por los ángulos  $\theta$  y  $\varphi$ , aplicando las fórmulas de transformación de velocidades, muestre que, según  $\mathcal{O}'$ , la luz proviene de la dirección definida por los ángulos

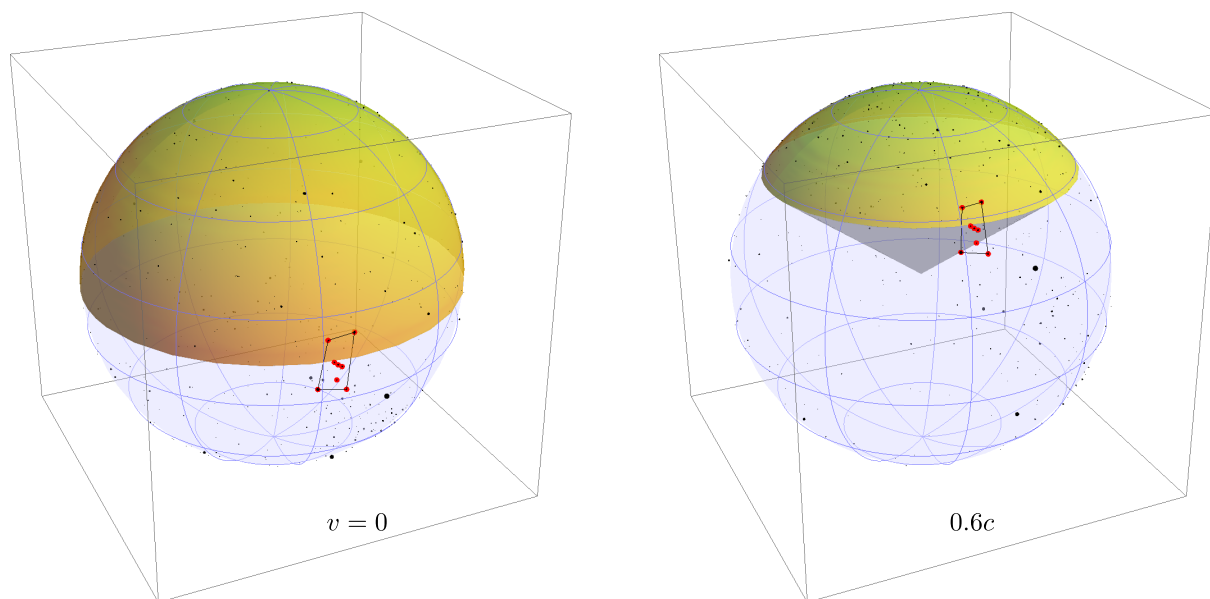
$$\varphi' = \varphi, \quad \cos \theta' = \frac{\cos \theta + \beta}{1 + \beta \cos \theta}. \quad (\beta = v/c)$$

- (b) Deduzca estas mismas expresiones a partir de la transformación del cuadrivector número de onda.  
 (c) Una fórmula importante, que puede deducir de lo anterior, relaciona las tangentes de los ángulos  $\theta$  y  $\theta'$ . Sabiendo que  $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$  y  $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x)$ , deduzca la *fórmula de aberración relativista*:

$$\tan \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\theta}{2}.$$

- (d) Aplique la fórmula anterior para valores particulares del ángulo  $\theta$ . Por ejemplo,  $\theta = 0, \frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi, \pi$ . En especial, muestre que todas las estrellas en el hemisferio  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$  de  $\mathcal{O}$  estarán concentradas, según  $\mathcal{O}'$ , en cierto cono alrededor del eje  $z$ . ¿Qué pasa cuando  $\beta$  se acerca a 1?  
 (e) El observador  $\mathcal{O}$  ve una pequeña constelación triangular, cuyas 3 estrellas están en las direcciones  $(\theta, \varphi)$ ,  $(\theta + \delta\theta_1, \varphi + \delta\varphi_1)$  y  $(\theta + \delta\theta_2, \varphi + \delta\varphi_2)$ . Usando el desarrollo de Taylor de la fórmula de aberración relativista, halle las posiciones de las mismas estrellas según  $\mathcal{O}'$ . ¿Qué relación geométrica guardan entre sí los triángulos que definen la constelación, según sea vista por uno u otro observador? ¿Pasará lo mismo con figuras más complicadas, como las Pléyades, o más extensas, como Orión?  
 (f) A partir de los resultados anteriores, discuta cualitativamente cuál sería el aspecto de la bóveda celeste para un observador que pasara cerca de la Tierra moviéndose a una velocidad relativista.

- (g) Para hacer en la computadora. El archivo adjunto\* contiene las orientaciones de las 1000 estrellas más brillantes vistas desde la Tierra. Con esas estrellas, construya el mapa celeste para un observador relativista. Repita el experimento para valores crecientes de  $v$ . ¿Se comprueban o desmienten sus primeras intuiciones?

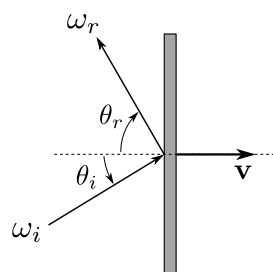


Un ejemplo de lo que debe obtenerse para el cielo del observador  $\mathcal{O}'$  en las cercanías de la Tierra:  $\mathcal{O}'$  se mueve en dirección a la estrella polar, con la velocidad indicada en cada caso. La sección sombreada abarca las estrellas del hemisferio superior del cielo de un observador en la Tierra. Se ha trazado el contorno de la constelación de Orión.

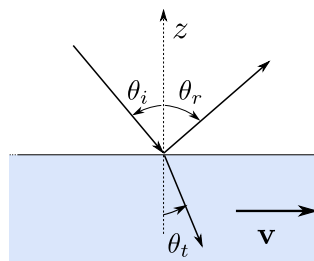
- (h) Para pensar: ¿son necesariamente las 1000 estrellas más brillantes del catálogo terrestre también las 1000 estrellas más brillantes para el observador en movimiento respecto de la Tierra?

2. Sobre un espejo plano que se mueve con velocidad  $v$  paralela a su normal incide luz de frecuencia  $\omega_i$  con un ángulo de incidencia  $\theta_i$ , como muestra la figura.

- (a) Encuentre la relación entre el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión. Analice el caso  $v \ll c$  y compare con el rebote de partículas no relativistas contra una pared en movimiento.
- (b) Encuentre la frecuencia de la onda reflejada. Para incidencia normal analice qué pasa cuando  $v \ll c$  y compare con lo que cabría esperar si, en lugar de luz, hubiera un flujo de partículas o de sonido contra una pared en movimiento.



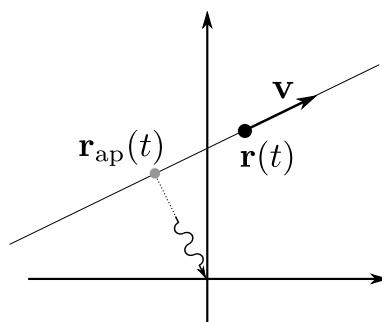
(problema 2)



(problema 3)

\* [http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo\\_de\\_estrellas.rar](http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/catalogo_de_estrellas.rar). El formato es  $(\varphi, \theta, \text{magnitud})$ .

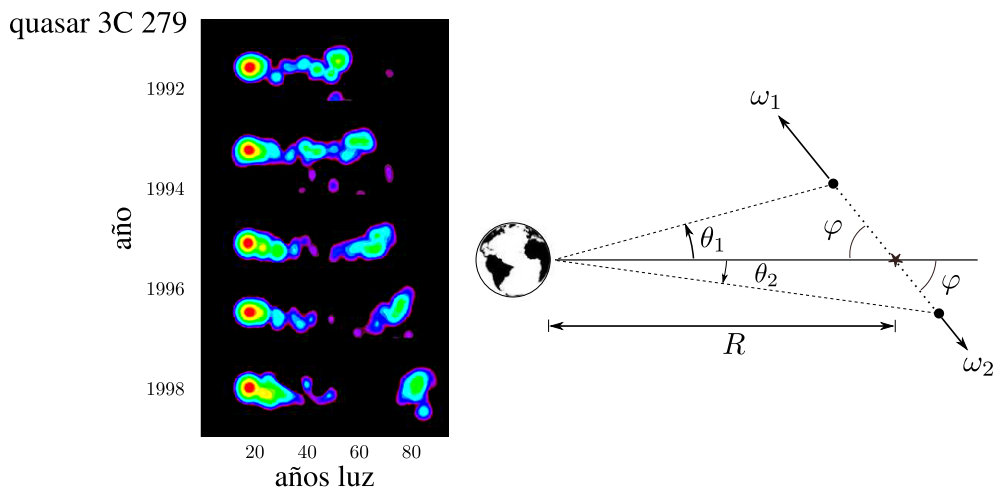
3. (Fresnel relativista.) En el sistema de laboratorio, una onda plana, de frecuencia  $\omega$  y amplitud  $E$ , incide desde el vacío sobre la superficie de un líquido de índice de refracción  $n$  y  $\mu = 1$ . El líquido ocupa el semiespacio  $z < 0$  y se mueve con velocidad  $v$  paralela a su superficie. En el laboratorio, la polarización de la onda puede ser TE o TM. Encuentre la dirección, la amplitud, la polarización y la frecuencia de las ondas transmitidas y reflejadas en el sistema de laboratorio. ¿Es posible definir en el laboratorio un ángulo análogo al ángulo de Brewster para líquidos en reposo?
4. (Posiciones y velocidades aparentes.) Una partícula se mueve sobre el eje  $x$  con velocidad  $v > 0$ , tal que  $x(t) = vt$ . Puesto que la luz tarda un tiempo finito en recorrer cualquier distancia, un observador en el origen, excepto en  $t = 0$ , nunca verá a la partícula en su posición actual,  $x(t)$ , sino en una posición aparente anterior,  $x_{ap}(t)$ . Para calcular  $x_{ap}(t)$ , usted necesita encontrar dónde estaba la partícula cuando emitió la luz que llega al origen a tiempo  $t$ . Es decir, se trata simplemente de un problema de intersección de trayectorias.
- (a) En un diagrama  $tx$  grafique  $x(t)$  y las posiciones en función del tiempo de dos rayos de luz emitidos por la partícula hacia el observador, uno antes de que la partícula pase por el origen y otro después. Señale en su diagrama los puntos que corresponden a las posiciones aparentes. Traduzca sus gráficos a ecuaciones y encuentre  $x_{ap}(t)$ . ¿Qué ocurriría si  $c$  fuese infinita?
- (b) Asociada a la posición aparente de la partícula, hay también una velocidad aparente,  $v_{ap}(t) = \dot{x}_{ap}(t)$ , que es la velocidad que el observador en el origen atribuiría a la partícula si asumiera que la luz tiene velocidad infinita. Calcule  $v_{ap}(t)$ . ¿Puede la velocidad aparente ser mayor que  $c$ ?
- (c) Una regla de longitud  $L$  se mueve sobre el eje  $x$ , de modo que su centro pasa por el origen en  $t = 0$ . El observador en el origen registra la trayectoria aparente de los extremos de la regla,  $x_{ap}^{(0)}(t)$  y  $x_{ap}^{(L)}(t)$ . La diferencia  $L_{ap} = x_{ap}^{(L)} - x_{ap}^{(0)}$  es la longitud aparente de la regla vista por el observador. ¿Cuál es la longitud aparente antes de llegar la regla al origen, mientras pasa por el origen y cuando ya ha pasado completamente? ¿Qué relación existe entre la longitud aparente  $L_{ap}$ , la longitud propia  $\gamma L$  y la longitud medida  $L$ ?
- (d) Generalice el cálculo de la posición aparente para una partícula se mueve según la ecuación  $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$ , con  $|\mathbf{v}| < c$ .



Dos métodos sugeridos. 1) Directamente calculando el tiempo retardado. 2) Con este otro método puede aprenderse algo: defina para cada instante  $t$  un sistema de referencia cuyo origen pase por el observador y que se mueva con la partícula. Luego use la fórmula relativista de aberración. Tenga en cuenta, al seguir este segundo método, que para el observador que se mueve con la partícula el tiempo retardado es un concepto innecesario y que, en el instante considerado, los mismos rayos de luz alcanzan tanto al observador en reposo como al observador en movimiento.

5. (Velocidades superlumínicas: *jets*.) Desde un mismo punto en el cielo, a una distancia  $R$  de varios miles de años luz de la Tierra, astrónomos terrestres ven partir dos objetos en direcciones opuestas. En la Tierra, lo que los astrónomos pueden medir directamente son las posiciones **aparentes**,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , y las velocidades angulares **aparentes**,  $\omega_1 = \dot{\theta}_1$  y  $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ , de estos objetos. En la figura se muestra un esquema de lo que observan los astrónomos en la Tierra. Los ángulos  $\theta_i$  son del orden del segundo de arco, en tanto que  $\varphi$  es, en principio, desconocido. Asuma que los dos objetos se mueven con la misma velocidad  $v$  (real, no aparente):

- Analizando el viaje de las señales luminosas entre los dos objetos y la Tierra, encuentre  $\omega_1$  y  $\omega_2$  en función de  $R$ ,  $\varphi$  y  $v$ . A partir de ahí, exprese  $v$  y  $\varphi$  en función de las cantidades medibles,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  y  $R$ .
- Puesto que los ángulos  $\theta_i$  son pequeños, la velocidad transversal que parece tener en el cielo cada objeto es aproximadamente igual a  $\omega_i R$ . ¿Bajo qué condiciones la velocidad transversal aparente de alguno de los objetos es mayor que  $c$ ? ¿Hay algún valor mínimo de  $v$  para que eso sea posible?
- En la práctica,  $R$  no se conoce con precisión, pero puede obtenerse otra ecuación que evita la necesidad de conocer  $R$  para calcular  $v$ . Suponga que la misma línea de emisión, de frecuencia propia  $\nu_0$ , puede identificarse en los dos objetos. Debido al efecto Doppler, la línea tendrá frecuencias  $\nu_1$  y  $\nu_2$ , según cuál objeto se observe. Halle  $v$  en función de  $\nu_0$ ,  $\nu_1$  y  $\nu_2$ .



Ejemplo de fuente superlumínica y la geometría del problema.

**Bibliografía<sup>†</sup>:**

- A. Komar, “Foundations of Special Relativity and the Shape of the Big Dipper”, Am. J. Phys. **33**, 1024 (1965).
- J. McKinley y P. Doherty, “In search of the starbow: The appearance of the starfield from a relativistic spaceship”, Am. J. Phys. **47**, 309 (1979).
- A. Peres, “Relativistic telemetry”, Am. J. Phys. **55**, 516 (1987).
- M. Chodorowski, “Superluminal apparent motions in distant radio sources”, Am. J. Phys. **73**, 639 (2005).
- V. Weisskopf, “The visual appearance of rapidly moving objects”, Phys. Today **13**, 24 (1960).
- R. Penrose, “The apparent shape of a relativistically moving sphere”, Proc. Camb. Philos. Soc. **55**, 137 (1959).

<sup>†</sup>[http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/biblio\\_guia\\_6.rar](http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/files/2015/11/biblio_guia_6.rar)